4. cvičení - Skalární součin a ortogonalita

Typy úloh, které je bezpodmínečně nutné umět řešit (uvažujeme výlučně eukleidovské a unitární prostory):

- doplnit ON soubor na ON bázi celého $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
- nalézt ON (OG) bázi $V \subset\subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
- nalézt ON (OG) bázi $V \subset\subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) obsahující nějaké předepsané vektory z $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) nebo vektory z nějaké podmnožiny $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
- nalézt OG doplněk $V \subset\subset \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ do $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
- nalézt OG doplněk V do Q, kde $V \subset\subset Q$ a $Q \subset\subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
- nalézt OG průmět vektoru

1. Doplňte soubor $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ na ON bázi $\mathbb{R}^4$ (dvěma způsoby).

2. Najděte ON bázi $V = [\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$.

3. Najděte OG bázi
$$V = [\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4, \quad \text{která obsahuje vektor z} \quad [\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\end{pmatrix}]_\lambda.$$

4. Najděte bázi $P^\perp \subset\subset \mathbb{R}^4$, je-li
   (a) $P = [\begin{pmatrix}3\\-5\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\7\end{pmatrix}]_\lambda$,
   (b) $P = [\begin{pmatrix}3\\1\\4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}]_\lambda$.

5. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Najděte bázi $Q^\perp$ do P, je-li
$$P = [\begin{pmatrix}1\\4\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-9\\1\\1\end{pmatrix}]_\lambda \quad \text{a} \quad Q = [\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\\3\end{pmatrix}]_\lambda.$$

6. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$. Najděte (třemi způsoby) $\vec{x}_P \in P$ a $\vec{x}_{P^\perp} \in P^\perp$ takové, že $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_P^\perp$, je-li
$$P = [\begin{pmatrix}2\\3\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}]_\lambda \quad \text{a} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-4\end{pmatrix}.$$

7. Doplňte vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, je-li to možné, na OG bázi prostorů

   (a)
$$P = [\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\2\\4\end{pmatrix}]_\lambda,$$

   (b)
$$Q = [\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}]_\lambda.$$

8. Najděte OG bázi $\mathbb{R}^3$ obsahující vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

9. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$,
$$P = [\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}]_\lambda.$$
   Najděte $P^\perp$.

10. Najděte ortogonální doplněk k $P = [\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\3\\2\end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$.

11. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$,
$$P = [\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}]_\lambda.$$
   Najděte
   (a) ortonormální bázi P,
   (b) OG průmět vektoru $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ do P, tedy $\vec{a}_P$.

12. Najděte ON bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = [\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}]_\lambda$.

13. Nechť $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = [\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\3\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}]_\lambda$. Najděte ortogonální průmět $\vec{x}$ do P, tj. $\vec{x}_P$.

14. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $Q = [\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}]_\lambda$, $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$. Najděte bázi $Q^\perp$ do P, tj. bázi ortogonálního doplňku Q do P.

15. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Najděte bázi $Q^\perp$ do P, tj. ortogonálního doplňku Q do P, je-li

$$Q = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda, \quad P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

16. Nechť je dán vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \mid \alpha_2 - \alpha_3 = 0\}$. Najděte ortogonální průmět $\vec{x}$ do P.

17. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$,

$$P = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda \quad \text{a} \quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_4 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Najděte

(a) $Q^\perp_P$ do P (nikoliv $Q^\perp$ do $\mathbb{R}^4$),

(b) OG průmět vektoru $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ do $Q^\perp_P$, tj. $\vec{x}_{Q^\perp_P}$.

18. Najděte ortonormální bázi $P = [\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$

(a) pomocí Gram-Schmidta,

(b) jiným způsobem.

19. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $P = \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\}$. Najděte

(a) $P^\perp$ do $\mathbb{R}^4$,

(b) ortonormální bázi P,

(c) ortogonální průmět $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ do P pomocí nalezené ON báze.

20. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^4$, $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$. Najděte

(a) $P^{\perp}$ do $\mathbb{C}^4$,

(b) ortogonální průmět $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ do P.

Výsledky: Skalární součin a ortogonalita

1. vyhovuje např. báze $(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$

2. vyhovuje např. báze $(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$

3. vyhovuje např. báze $(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 14 \\ -1 \\ 18 \end{pmatrix})$

4. (a) např. $[\begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (b) např. $[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

5. $P^{\perp} = [\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}]_\lambda$

6. $\vec{x}_P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_{P^\perp} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

7. (a) $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq Q$

8. např. $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$

9. $P^\perp = [\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

10. $P^\perp = [\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda$

11. (a) vyhovuje např. báze $(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})$

    (b) $\vec{a}_P = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix}$

12. vyhovuje např. báze $(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

13. $\vec{x}_P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

14. např. $(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$

15. např. $(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix})$

16. možný postup: jasně $P^\perp = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda \Longrightarrow \vec{x}_P = \vec{x} - \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-\alpha \\ 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$, protože

    $\vec{x} \in P$ je $-2 - 2\alpha = 0$ tj. $\alpha = -1 \Longrightarrow \vec{x}_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

17. (a) $Q_P^\perp = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

    (b) $\vec{x}_{Q_P^\perp} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

18. např. $(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -4\\ 2\\ 4\\ 3 \end{pmatrix})$

19. (a) $P^{\perp} = [\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}]_{\lambda}$

(b) vyhovuje např. báze $(\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ -1\\ 0 \end{pmatrix})$

(c) průmět je $\langle \begin{pmatrix} 2\\ -2\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2\\ -2\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2\\ -2\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5\\ -7\\ 2\\ -3 \end{pmatrix}$

20. $P^{\perp} = [\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i\\ -1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}]_{\lambda}$

$\vec{x}_P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\\ 3+i\\ 3-i\\ 0 \end{pmatrix}$