2. cvičení - Inverzní matice

1. Dokažte, že následující matice je regulární, a nalezněte k ní inverzní.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Najděte $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$ a řešte soustavu $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$, aniž byste počítali $\mathbb{A}^{-1}$, poté najděte $\mathbb{A}^{-1}$ a své výsledky zkontrolujte. Matice jsou definovány následovně:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ jsou následující matice regulární. Pro takové matice pak najděte matice k nim inverzní.

(a) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$

4. Z přednášky víte, že lze-li čtvercovou matici $\mathbb{A}$ ekvivalentními řádkovými úpravami $E_1, E_2, \ldots, E_k$ převést na $\mathbb{I}$, pak $\mathbb{I} = \mathbb{R}_k \cdot \cdots \cdot \mathbb{R}_2 \cdot \mathbb{R}_1 \cdot \mathbb{A}$, kde $\mathbb{R}_i$ vznikla z $\mathbb{I}$ ekvivalentní úpravou E_i. V příkladu číslo 1 zkonstruujte matici $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí takového postupu, tj. $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{R}_k \cdot \cdots \cdot \mathbb{R}_2 \cdot \mathbb{R}_1$.

5. Spočtěte vše, co lze spočíst bez výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$:

   (a) $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$,

   (b) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$,

   (c) $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$,

   (d) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}$,

   (e) $\mathbb{A}^T\mathbb{A}^{-1}$,

   kde $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

6. Najděte $\mathbb{A}^{-1}$, pro taková α, pro která existuje, kde $\mathbb{A}$ je matice soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & \alpha^2 y & & & = & \alpha^3 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha \\ -x & + & y & - & \alpha z & = & 1 \end{array}.$$

   Pomocí této matice vyřešte soustavu v případě, kdy má jediné řešení.

7. Nechť jsou dány

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte ty z následujících součinů, které mají smysl. A u těch, které smysl nemají, vysvětlete proč.

$$1)\ \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}^{-1}, \quad 2)\ \mathbb{A}\mathbb{B}^{-1}, \quad 3)\ \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}, \quad 4)\ \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}, \quad 5)\ (\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1}, \quad 6)\ (\mathbb{B}^T\mathbb{A})^{-1}.$$

8. Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Zkontrolujte, že $\mathbb{A}$ je regulární.

   (b) Najděte bez výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$ ty z následujících součinů matic, které mají smysl:

$$1)\ \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}, \quad 2)\ \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}, \quad 3)\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}, \quad 4)\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}.$$

9. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ regulární?

   (b) Pro taková α najděte $\mathbb{A}^{-1}$.

   (c) Jak se operátor A definovaný pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ jako $A\vec{x} := \mathbb{A}\vec{x}$ jmenuje? (Nápověda: Uvědomte si, jakou operaci A s vektory v $\mathbb{R}^3$ provádí.)

10. Nechť je dána matice $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (Matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ neznáme.)

    Z následujících matic vypočtěte všechny ty, které lze na základě zadaných údajů získat: $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}^{-1}$, $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$, $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}$, $\mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A}^{-1}$, $\mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}$, $\mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}^T$.

11. Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.301 & 1.012 & 3.333 \\ 0 & 0 & 2.56 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 3.56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

    (a) Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ Gaussovou eliminací.

    (b) Určete $h(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B})$.

Výsledky: Inverzní matice

1. $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. (a) pro každé α $\qquad \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$

   (b) pro žádné α

   (c) pro $\alpha \neq 0$ $\qquad \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) pro $\alpha \neq \pm 1$ $\qquad \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2-1}\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$

   (e) pro $\alpha \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{2\alpha^2-1}\begin{pmatrix} -\alpha^2 & \alpha & \alpha^2-1 \\ \alpha & -1 & \alpha \\ \alpha^2-1 & \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix}$

   (f) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \pm\sqrt{2}$ $\qquad \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha(2-\alpha^2)}\begin{pmatrix} -1 & \alpha & 1-\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & \alpha \\ 1-\alpha^2 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$

   (g) pro $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha^3+1}\begin{pmatrix} \alpha^2 & -\alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & -\alpha \\ -\alpha & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}$

   (h) pro $\alpha \neq 1$ $\qquad \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha-1}\begin{pmatrix} \alpha+1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. pokud pokládáme za ekvivalentní úpravu zvoleného řádku i připočtení násobku jiného řádku platí např. rozklad

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. (a) $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ nemá smysl

   (b) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}$ nemá smysl

   (e) $\mathbb{A}^{\top}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$, neboť $\mathbb{A}$ je symetrická

6. $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1$ $\qquad \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2(\alpha+1)}\begin{pmatrix} \alpha^2+\alpha & -\alpha^3 & -\alpha^3 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ -1-\alpha & \alpha^2+\alpha & 0 \end{pmatrix}$

řešení je $\mathbb{A}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha^3\\ \alpha\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^2-\alpha\\ 1\\ 1-\alpha\end{pmatrix}$

7. $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 2 & -4\\ -3 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$
ostatní součiny nemají smysl, neboť je matice $\mathbb{B}$ singulární

8. $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 6 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$
součin $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}$ nemá smysl a $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

9. (a) $\mathbb{A}$ je regulární pro všechna α
   (b) $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^\top = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
   (c) jde o speciální případ tzv. elementární matice rotací - vektor $\vec{x}$ si po násobení touto maticí zachová 3. složku, zatímco jeho průmět do roviny generované vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ se otočí o úhel α, celkově to tedy znamená, že v našem případě se vektor $\vec{x}$ otočí kolem "osy" $\vec{e}_3$ o úhel α

10. spočítat lze pouze $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}^{-1} = (\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ a

$\mathbb{A}^\top\mathbb{B}^\top = (\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

11. (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$
    (b) $h(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}) = 3$, neboť $h(\mathbb{B}) = 3$ a $\mathbb{A}$ je regulární