1. cvičení - Matice a lineární zobrazení a Soustavy lineárních algebraických rovnic

Matice a lineární zobrazení

Z teorie je třeba vědět:

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a nechť $\vec{b} \in A(P)$, pak $A^{-1}\vec{b}$ (množina řešení $A\vec{x} = \vec{b}$) splňuje $A^{-1}\vec{b} = \vec{a} + \ker A$, kde $\vec{a}$ je partikulární řešení, tedy $\vec{a}$ splňuje $A\vec{a} = \vec{b}$.
2. Matice zobrazení A v bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ splňuje $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$.
3. Jak se získá matice složeného zobrazení pomocí matic skládaných zobrazení.
4. Jak se řeší soustava lineárních algebraických rovnic (po vyslovení Frobeniovy věty umíme najít celou množinu řešení).

1. Nechť
$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$
jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ zadané svou maticí v bázi $\mathcal{X}$
${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$,
   (a) je-li $(\vec{b})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$,
   (b) je-li $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$,
   (c) je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2. Nechť
$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$
jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$,
${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$, je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Je zadán lineární operátor A na $\mathbb{R}^3$ pomocí své matice v bázi $\mathcal{X}$ ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte
   (a) $\ker A, d(A)$ a $h(A)$ (je A regulární operátor?),

(b) všechna řešení rovnice

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

(c) $A^{-1}(P)$, tedy vzor podprostoru P, je-li

$$P = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

4. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (-2\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3, -\vec{x}_1 + \vec{x}_3)$ jsou dvě báze vektorového prostoru V_3. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte jádro a hodnost zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ zadaného pomocí matice ve standardních bázích

$$^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta & 1 \\ -\beta & \beta^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$.

Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -5 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dále je zadáno lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ následující maticí ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nalezněte všechna řešení rovnice $BA\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Je zadán lineární operátor A na $\mathbb{R}^3$ pomocí své matice v bázi $\mathcal{X}$ $\quad {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Nalezněte

(a) $\ker A, d(A)$ a $h(A)$ (je A regulární operátor?),

(b) všechna řešení rovnice

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8. V závislosti na parametrech $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ najděte:

(a) $\ker A$,

(b) $A^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$,

kde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je definované pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jako

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y + \alpha z \\ -\alpha x + \beta z \end{pmatrix}.$$

9. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ je definované pomocí matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^2$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$

   (a) najděte jádro A,

   (b) určete, zda A je prosté,

   (c) najděte obor hodnot $A(\mathbb{R}^2)$,

   (d) určete hodnost A.

10. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ definujeme $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a dále známe ${}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha^2 & -\alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

    (a) Rozhodněte, v jakém pořadí lze zobrazení skládat.

    (b) Pro složené zobrazení najděte v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ jeho hodnost a jádro.

Výsledky: Matice a lineární zobrazení

1. (a) např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (b) $B^{-1}(\vec{b}) = \emptyset$

   (c) $B^{-1}(\vec{b}) = \emptyset$

2. např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}]_\lambda$.

3. (a) $\ker A = \vec{0}$, $d(A) = 0$, $h(A) = 3$, A je regulární operátor

   (b) $A^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\}$

   (c) např. $A^{-1}(P) = [\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

4. $A^{-1}(\vec{b}) = \{\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3\}$

5. (i) $\beta \neq 0 \wedge \beta \neq 1 \Longrightarrow h(A) = 2$, $\ker A = [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}]_\lambda$

(ii) $\beta = 0 \Longrightarrow h(A) = 1$, $\ker A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) $\beta = 1 \Longrightarrow h(A) = 2$, $\ker A = [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

6. např. $(BA)^{-1}(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$

7. (a) $h(A) = 2,\ d(A) = 1,\ \ker A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda,\ A$ není regulární

(b) $A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

8. (i) $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \Longrightarrow \ker A = [\begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha} \\ -\frac{\alpha+\beta}{\beta} \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda,\ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ \frac{2}{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} + \ker A$

(ii) $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0 \Longrightarrow \ker A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda,\ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} + \ker A$

(iii) $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0 \Longrightarrow \ker A = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda,\ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix} + \ker A$

(iv) $\alpha = \beta = 0 \Longrightarrow \ker A = \mathbb{R}^3,\ A^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \emptyset$

9. (i) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \Longrightarrow \ker A = \{\vec{0}\},\ A$ je prosté, $A(\mathbb{R}^2) = [\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}]_\lambda,\ h(A) = 2$

(ii) $\alpha = 0 \vee \alpha = 1 \Longrightarrow \ker A = \{\vec{0}\},\ A$ není prosté, $h(A) = 1,\ A(\mathbb{R}^2) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$ pro $\alpha = 1$,

$A(\mathbb{R}^2) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pro $\alpha = 0$

10. (a) existuje zobrazení AB i BA

(b) (i) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$ je $h(AB) = 2,\ \ker AB = \{\vec{0}\},\ h(BA) = 2$, $\ker BA = [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(ii) pro $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$ je $h(AB) = 1,\ \ker AB = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda\ h(BA) = 1,\ \ker BA =$
$[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

Soustavy lineárních rovnic

Z teorie je třeba znát pojmy: soustava m lineárních rovnic o n neznámých, (rozšířená) matice soustavy, homogenní soustava, ekvivalentní úpravy, hodnost matice, partikulární řešení a především je třeba znát Frobeniovu větu

1. Nalezněte množinu všech řešení následující homogenní soustavy lineárních rovnic.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x & + & 14y & & & + & 11t & = & 0 \\ 13x & + & 36y & - & 10z & + & 19t & = & 0 \\ 3x & + & 25y & - & 19z & + & 2t & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & + & 5t & = & 0 \end{array}$$

2. Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic s nenulovou pravou stranou.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 7y & + & 3z & + & t & = & 6 \\ 3x & + & 5y & + & 2z & + & 2t & = & 4 \\ 9x & + & 4y & + & z & + & 7t & = & 2 \end{array}$$

3. Nalezněte množinu všech řešení následující lineární rovnice.

$$2x + y - z + t - 3u = 1$$

4. Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních algebraických rovnic.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrr} 2x & + & y & - & z & + & t & - & 3u = & 1 \\ -11x & + & 2y & & & - & t & + & 3u = & -1 \end{array}$$

5. Zjistěte, jakou podmínku musí splňovat parametry α, β, aby následující soustava lineárních rovnic měla netriviální řešení, a určete dimenzi vektorového prostoru všech řešení této soustavy.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ \alpha x & + & \beta y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

6. Nalezněte množinu všech řešení následujících soustav lineárních rovnic v závislosti na parametru λ.

   (a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 1 \end{array}$$

   (b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & + & 4u & = & 5 \\ 4x & - & 2y & + & 5z & + & 6u & = & 7 \\ 6x & - & 3y & + & 7z & - & \lambda u & = & 9 \\ \lambda x & - & 4y & + & 9z & + & 10u & = & 11 \end{array}$$

7. Najděte množinu všech řešení následující homogenní soustavy LAR v závislosti na parametrech α, β.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & \beta y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & \gamma z & = & 0 \end{array}$$

8. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení v $\mathbb{R}^4$ následující soustavy.

$$\beta \cdot x - (\beta^2 - 1) \cdot y + 0 \cdot z + u = \beta$$

9. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu řešení následující soustavy.

$$\begin{array}{ccccccc} \beta x & + & y & + & z & = & \beta \\ \beta x & + & \beta y & + & z & = & \beta \\ \beta x & + & \beta y & + & \beta z & = & \beta \end{array}$$

10. V závislosti na parametrech $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující rovnice.

$$\alpha x \ + \ \beta y \ + \ \gamma z \ = \ 1$$

11. Najděte množinu všech řešení následující soustavy LAR v závislosti na parametrech α, β.

$$\begin{array}{rcccccl} (2\alpha-1)x & - & y & & & = & 2\beta-3 \\ (\alpha+2)x & & & + & 2z & = & \beta \\ -x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

12. Dokažte, že má-li následující soustava LAR právě jedno řešení, pak $\alpha\beta\gamma \neq 0$. Nalezněte toto řešení.

$$\begin{array}{ccccccc} \beta x & + & \alpha y & & & = & \gamma \\ \gamma x & & & + & \alpha z & = & \beta \\ & & \gamma y & + & \beta z & = & \alpha \end{array}$$

13. Najděte všechna řešení následující soustavy lineárních algebraických rovnic v závislosti na parametrech $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha \\ \beta x & + & y & + & \alpha z & = & \beta \end{array}$$

14. Najděte α, β, γ tak, aby $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ bylo řešením následující soustavy LAR.

$$\begin{array}{ccccccc} 4x & - & 2y & + & 2z & = & \alpha \\ 2x & & & + & 2z & = & \beta \\ -x & + & y & + & z & = & \gamma \end{array}$$

15. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující soustavy

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha x & + & \alpha^2 y & & & = & \alpha^3 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha \\ -x & + & y & - & \alpha z & = & 1 \end{array} .$$

16. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující rovnice

$$\alpha x \ + \ \beta y \ + \ \alpha z \ + \ \beta u \ = \ \alpha \ .$$

17. Nalezněte množinu všech řešení následujících soustav lineárních rovnic v závislosti na parametrech α, β.

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} (\alpha+1)x & + & (\beta+1)y & + & (\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta)z & = & \beta \\ (\beta+1)x & + & (\alpha+1)y & + & (\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta)z & = & -\alpha \\ x & + & y & + & (\alpha+\beta)z & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\alpha x & & & + & \alpha z & = & 1 \\
\alpha^2 x & + & y & + & \alpha\beta z & = & -1 \\
\alpha\beta x & + & y & & & = & \beta
\end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha x & + & y & + & \alpha z & = & \beta \\
\beta x & + & 2y & - & z & = & \alpha \\
\alpha x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & 1
\end{array} \qquad (\beta \in \mathbb{R})$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
(\alpha^2+\alpha)x & + & (\alpha^2-\alpha)y & + & \alpha z & = & \alpha\beta \\
(\alpha+2\alpha\beta)x & + & (\alpha^2-2\alpha-1)y & + & \alpha z & = & \alpha\beta-\beta^2 \\
(\alpha^2-2\alpha\beta)x & + & (2\alpha+2\beta+1)y & & & = & \beta^2+\alpha\beta+2
\end{array} \qquad (\beta \in \mathbb{R})$$

18. Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametrech α, β, γ.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
5x & - & y & - & 4z & = & \alpha+\beta \\
4x & + & 6y & + & (\gamma-1)z & = & 9-\beta \\
2x & + & 3y & + & (\gamma+4)z & = & 9-\alpha-\beta
\end{array}$$

19. Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametrech $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda x & + & y & + & z & = & \alpha \\
x & + & \lambda y & + & z & = & \beta \\
x & + & y & + & \lambda z & = & \gamma
\end{array}$$

20. Najděte množinu všech řešení následující soustavy LAR v závislosti na parametru λ.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda x & + & 2\lambda y & + & z & = & 1 \\
2x & + & \lambda^2 y & + & (\lambda+1)z & = & \lambda
\end{array}$$

21. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující soustavy.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\alpha x & - & y & - & z & = & 1 \\
-x & - & y & - & z & = & 1 \\
x & + & \alpha y & + & \beta z & = & -\alpha
\end{array}$$

22. Najděte množinu všech řešení následující soustavy LAR v závislosti na parametrech α, β, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha x & + & \beta y & + & z & = & \alpha \\
\beta x & + & y & + & 2z & = & 1 \\
\alpha x & + & y & + & z & = & \beta
\end{array}$$

23. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující soustavy.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x & - & 2\beta y & + & (2+\beta)z & - & u & = & 2 \\
\beta x & - & \beta^2 y & & & + & u & = & \beta
\end{array}$$

24. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující soustavy.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
-\alpha x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \\
\alpha^2 x & + & y & + & \alpha z & = & \alpha \\
-\alpha^3 x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha^2 \\
(\alpha^2-\alpha)x & + & 2y & + & 2\alpha z & = & \alpha+1
\end{array}$$

Výsledky: Soustavy lineárních rovnic

1. např. $S_0 = [\begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

2. např. $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

3. např. $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

4. např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

5. právě, když $\alpha - \beta = -2$, $\dim S_0 = 1$, $S_0 = [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

6. (a) (i) $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq 2$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+2} \\ \frac{1}{\lambda+2} \\ \frac{1}{\lambda+2} \end{pmatrix}$

   (ii) $\lambda = 1$ např. $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (iii) $\lambda = 2$ NŘ

   (b) (i) $\lambda \neq 8 \wedge \lambda \neq -8$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (ii) $\lambda = -8$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (iii) $\lambda = 8$ např. $S = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

7. netriviální řešení, právě když $\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma + 2$ např. $S = [\begin{pmatrix} 1 - \beta\gamma \\ \gamma - 1 \\ \beta - 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

8. nezávisle na β řešení např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \beta^2 - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

9. (i) $\beta \neq 0 \wedge \beta \neq 1$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (ii) $\beta = 1$ např. $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (iii) $\beta = 0$ např. $S_0 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

10. (i) $\alpha = \beta = \gamma = 0$ NŘ

   (ii) $\alpha \neq 0$ např. $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (iii) $\beta \neq 0$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (iv) $\gamma \neq 0$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ -\beta \end{pmatrix}]_\lambda$

11. (i) $\alpha \neq 0$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \frac{\beta-2}{\alpha} \\ \frac{-\alpha-\beta+2}{\alpha} \\ \frac{\alpha-\beta+2}{\alpha} \end{pmatrix}$

   (ii) $\alpha = 0 \wedge \beta = 2$ např. $S = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (iii) v ostatních případech NŘ

12. řešení pro $\alpha\beta\gamma \neq 0$ $\begin{pmatrix} \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \\ \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} \\ \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} \end{pmatrix}$

13. (i) pro $\beta \neq \alpha^2$ např. $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 \\ \beta - \alpha^2 \\ \alpha - \alpha\beta \end{pmatrix}]_\lambda$

   (ii) pro $\alpha = \beta = 1$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (iii) pro $\alpha = -1 \wedge \beta = 1$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (iv) v ostatních případech NŘ

14. vyhovuje uspořádaná trojice $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}]$, kde $t \in \mathbb{C}$

15. (i) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 \\ 1 \\ 1 - \alpha \end{pmatrix}$

(ii) $\alpha = 0$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) $\alpha = -1$ např. $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

16. (i) $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(ii) $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0$ např. $S = [\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0$ např. $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iv) $\alpha = \beta = 0 \qquad S = \mathbb{R}$

17. (a) (i) $\alpha \neq \beta$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \\ 0 \\ \frac{1}{\beta-\alpha} \end{pmatrix}$

(ii) $\alpha = \beta = 0$ např. $S = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) v ostatních případech NŘ

(b) (i) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 2\beta$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \frac{2\beta+1}{\alpha(2\beta-\alpha)} \\ \frac{\alpha\beta+\beta}{\alpha-2\beta} \\ \frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha-2\beta)} \end{pmatrix}$

(ii) $\alpha = -1 \wedge \beta = -\frac{1}{2}$ např. $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) v ostatních případech NŘ

(c) (i) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -\frac{1}{2}$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\alpha^2} \\ \frac{\alpha^3-\alpha^2-\alpha\beta^2+1}{(\alpha-1)(2\alpha+1)} \\ \frac{\beta+\alpha^3-\alpha^2-2\alpha-\alpha\beta^2+2\alpha\beta}{(\alpha-\alpha^2)(2\alpha+1)} \end{pmatrix}$

(ii) $\alpha = \beta = 1$ např. $S = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) v ostatních případech NŘ

(d) (i) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 2\beta \wedge \alpha \neq -2\beta$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \frac{-\beta^2(\alpha+2\beta)+(\alpha+1)(\alpha\beta+2)}{\alpha(4\beta^2-\alpha^2)} \\ \frac{\alpha\beta+2}{\alpha+2\beta} \\ \frac{\alpha\beta(4\beta^2-\alpha^2)+(\alpha+1)\beta^2(\alpha+2\beta)+(\alpha-\alpha^2)(\alpha\beta+2)}{4\beta^2-\alpha^2} \end{pmatrix}$

(ii) $\alpha = 0 \wedge \beta = 1$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) $\alpha = -2 \wedge \beta = -1$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iv) $\alpha = -2 \wedge \beta = 1$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 25 \end{pmatrix}]_\lambda$

(v) $\alpha = 2 \wedge \beta = -1$ např. $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(vi) v ostatních případech NŘ

18. (i) $\gamma \neq -9$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \frac{\gamma(4\alpha+3\beta)+2\alpha+10\beta+153}{17(\gamma+9)} \\ \frac{\gamma(3\alpha-2\beta)-7\alpha-35\beta+153}{17(\gamma+9)} \\ \frac{9-2\alpha-\beta}{\gamma+9} \end{pmatrix}$

(ii) $\gamma = -9 \wedge 2\alpha + \beta = 9$ např. $S = \begin{pmatrix} \frac{54-4\alpha}{34} \\ \frac{7\alpha-18}{17} \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) v ostatních případech NŘ

19. (i) $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -2$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \frac{\alpha(\lambda+1)-\beta-\gamma}{(\lambda+2)(\lambda-1)} \\ \frac{\beta(\lambda+1)-\alpha-\gamma}{(\lambda+2)(\lambda-1)} \\ \frac{\gamma(\lambda+1)-\alpha-\beta}{(\lambda+2)(\lambda-1)} \end{pmatrix}$

(ii) $\lambda = 1 \wedge \alpha = \beta = \gamma$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) $\lambda = -2 \wedge \alpha + \beta + \gamma = 0$ např. $S = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha}{3} \\ \frac{-\beta}{3} \\ \frac{-\gamma}{3} \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iv) v ostatních případech NŘ

20. (i) $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 2 \wedge \lambda \neq -2$ např. $S = \begin{pmatrix} \frac{2}{\lambda^2-4} \\ \frac{1}{4-\lambda^2} \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-2} \\ \frac{\lambda-1}{2\lambda-\lambda^2} \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\lambda = 0$ např. $S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) $\lambda = 2$ např. $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iv) $\lambda = -2$ NŘ

21. (i) $\alpha \neq= -1 \wedge \alpha \neq \beta$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\beta = \alpha$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) $\alpha = -1$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -\beta - 1 \\ \beta - 1 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iv) v ostatních případech NŘ

22. (i) $\beta \neq 1 \wedge \beta \neq 2\alpha$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \frac{1-\alpha-2\beta+2\beta^2}{(1-\beta)(\beta-2\alpha)} \\ \frac{\beta-\alpha}{1-\beta} \\ \frac{\beta^3+\alpha^2+\alpha-3\alpha\beta}{(1-\beta)(2\alpha-\beta} \end{pmatrix}$

(ii) $\beta = 1 \wedge \alpha = 1$ např. $S = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) v ostatních případech NŘ

23. (i) $\beta \neq -2$ např. $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(ii) $\beta = -2$ např. $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

24. (i) $\alpha \neq= 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -1$ právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \frac{\alpha-1}{\alpha^2+\alpha} \\ 2\alpha \\ \frac{-2\alpha}{\alpha+1} \end{pmatrix}$

(ii) $\alpha = 1$ např. $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(iii) v ostatních případech NŘ