Generátory pseudonáhodných čísel

Karel Břinda

FJFI ČVUT v Praze

7. března 2011

O čem bude dnes řeč

- Motivace, využití generátorů
- Co to je náhodná posloupnost
- Jak náhodnost testovat
- Se kterými generátory se nejčastěji setkáme a na co si dát pozor
- Proudové šifry

Motivace

Kde všude se nám hodí náhodná čísla

- Simulace
- Numerická analýza - např. výpočet čísla π
- Programování - testy efektivity algoritmů, náhodnostní „algoritmy“ (např. genetické alg.), ...
- Rozhodování - losování u veřejných zakázek, ...
- Kryptografie
- Zábava

Konkrétní využití + požadavky na generátor

Způsob využití	**Požadavky na generátor**
Počítačové hry	(žádné :)
Kryptografie - proudové šifry	Kvalita Rychlost Zrekonstruovatelnost
Kryptografie - generování klíčů	Kvalita
Výpočty metodou Monte Carlo	Kvalita Rychlost Zrekonstruovatelnost

Posloupnost náhodných čísel

Různé způsoby chápání

- Intuitivně
- Statisticky
- Přes vyčíslitelnost - Turingův stroj

Typy generátorů

- Generátor náhodných čísel (RNG)
- Generátor pseudonáhodných čísel (PRNG)

Generátory náhodných čísel (RNG)

- Nedeterministický zdroj + funkce na jeho zpracování (destilační funkce)
- Obvykle měření nějaké fyzikální veličiny (např. elektronický šum), pohyb myši uživatele, . . .
- Takto získaná posloupnost nelze zrekonstruovat
- Pomalé

Generátory pseudonáhodných čísel (PRNG)

- Algoritmus generující pro daný vstup (takzvaný seed) posloupnost čísel
  - Seed musí být volen také náhodně

$$X_i = f(X_{i-1}, \ldots, X_{i-j})$$

- Takto získaná posloupnost lze se znalostí seedu zrekonstruovat
- Dobré generátory produkují lepší posloupnosti než fyzikální zdroje
- Základní pravidlo: Náhodně zvolená čísla nelze generovat náhodně zvolenou metodou. Výpočet musí být podložen teorií.
- Základní omyl: Pokud vezmeme dobrý generátor a trošku ho upravíme, dostaneme stejně tak dobrý nebo lepší

Požadavky na PRNG

- Co nejdelší perioda
- Rovnoměrné rozložení čísel X_i
- Mezi členy $X_i, \ldots, X_{i+j}$ ani $f(X_i), \ldots, f(X_{i+j})$, kde f je nějaká funkce, nesmí být žádný vztah
- Efektivita (rychlost generování a paměťová náročnost)
- Reprodukovatelnost

Nejčastější operace

- *mod*
- Bitový *XOR*
- Bitový *AND*
- Bitový $<<$
- Bitový $>>$
- Vynechání některých čísel (těch, které způsobují korelaci)
- Jemná úprava mezivýsledků

Testování

- Mnoho různých testů hledající nenáhodnosti, existují ucelené baterie testů
    - STS (Statistical test suite)
    - Diehard

Frekvenční test

- Monobitový - Zkoumá počet 0 a 1 v celé předané posloupnosti
- V blocích - Zkoumá počet 0 a 1 v blocích o M bitech

Test sérií

- Zkoumá délky podposloupností stejných bitů

Test nejdelší série

- Srovnává, zda nejdelší série 1 je přibližně stejná jako nejdelší série 1 u náhodné posloupnosti
- Pokud otestujeme pro 1, nemusíme už opakovat pro 0

Test hodností binární matice

- Testovanou posloupností se naplní několik matic
- Spočítají se jejich hodnosti

Spektrální test

- Založeno na diskrétní Fourierově transformaci - zkoumají se šířky píků
- Detekuje periodičnosti posloupnosti (opakující se vzory blízko sebe)

Porovnávací test s překrýváním a bez překrývání

- Cílem testu je odhalit, zda se nevyskytují v posloupnosti příliš často některé předdefinované vzory
- Lze si představit jako posouvání okénka o dané délce po posloupnosti a hledání daného vzoru

Mauerův univerzální statistický test

- Zkoumá, zda není možné testovanou posloupnost zkomprimovat

Test lineární složitosti

- Testovaná posloupnost bitů se rozdělí postupně do několika stejně dlouhých bloků
- U každého bloku se otestuje, jak složitý LFSR by byl potřeba, aby vygeneroval právě tento blok

Sériový test

- Zkoumá překryvy m-bitových vzorů v rámci testované posloupnosti
- Pro dané m by měly mít všechny m-bitové vzory stejnou pravděpodobnost výskytu

Nejznámější PRNG

- Kongruenční generátory
  - Lineární kongruenční generátor (LCG)
  - Kvadratický kongruenční generátor (QCG)
  - Kubický kongruenční generátor (CCG)
  - Inverzní kongruenční generátor
- Lineární posuvné registry se zpětnou vazbou (LFSR)
- Mersenne twister
- Blum-Blum-Shub (BBSG)

Lineární kongruenční generátor[1]

- Nejrozšířenější typ PRNG
- Základní podoba:

Hlavní vzorec	$X_{n+1} = (aX_n + c) \mod m$
Vztah pro $(n+k)$. člen	$X_{n+k} = (a^k X_n + \frac{a^k - 1}{a-1} c) \mod m$
Konstanty	$0 < \mathbf{m}$ modul $2 \leq \mathbf{a} < m$ násobitel $0 \leq \mathbf{c} < m$ inkrement $0 \leq \mathbf{X_0} < m$ seed

- Minimální délka cyklu v permutaci X_n - perioda generátoru

[1] LCG - Linear congruential generator

Výběr konstant

- Modul m
  - Musí být dostatečně velký (perioda vždy $\leq$)
  - Nesmí být příliš velký (rychlost výpočtu) - z výp. hlediska ideálně $m = 2^{\text{velikost použitého registru na procesoru}}$ (problém - nejnižší bity výsledku jsou „málo náhodné“)
- Násobitel a a inkrement c

Věta

Lineární kongruentní posloupnost definovaná parametry m, a, c a X_0 má periodu délky m právě tehdy, když

- *c a m jsou nesoudělné;*
- *$a - 1$ je násobkem každého prvočísla, které dělí m;*
- *$a - 1$ je násobkem 4, pokud je i m násobkem 4.*

- X_0 libovolně, často se odvozuje z aktuálního systémového času

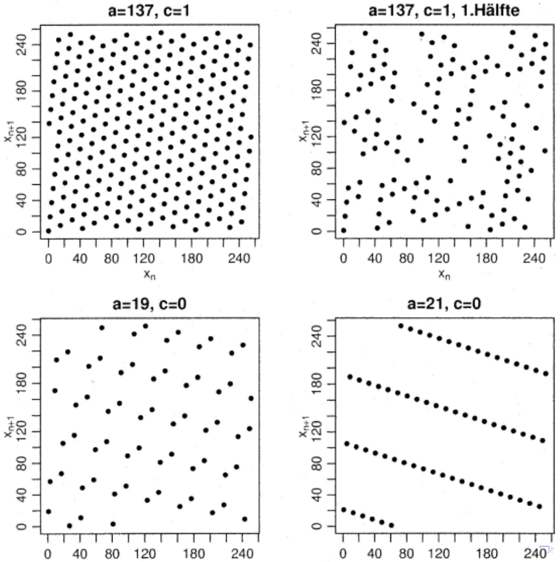
Několik receptů k volbě konstant

- Je-li $m = 2^n$, najdeme a takové, že $a \mod 8 = 5$
- Je-li $m = 10^n$, najdeme a takové, že $a \mod 200 = 21$
- a hledáme nejlépe v intervalu $0{,}01m - 0{,}99m$, ve dvojkovém a desítkovém rozvoji by neměl mít jednoduchý, pravidelný vzorek
- c nesmí být soudělné s m, často se volí $c = 1$ nebo $c = a$

Výhody a nevýhody LCG

Výhody
- Rychlý
- Jednoduše naprogramovatelný

Nevýhody
- V nějakém n-rozměrném prostoru umisťuje všechny body do několika nadrovin
- Bity nižších řádů nejsou tolik náhodné
- Předvídatelný


a=137, c=1
a=137, c=1, 1.Hälfte
a=19, c=0
a=21, c=0
x_n
x_{n+1}
0
40
80
120
180
240

Implementace LCG

Implementace	**m**	**a**	**c**	**Použité bity**
Borland C/C++	2^{32}	22 695 477	1	30 . . . 16 v *rand()* 30 . . . 0 v *lrand()*
glibc [2]	2^{32}	1 103 515 245	12 345	30 . . . 0
ANSI C [3]	2^{32}	1 103 515 245	12 345	30 . . . 16
Borland Delphi	2^{32}	134 775 813	1	63 . . . 32
Microsoft Visual C++	2^{32}	214 013	2 531 011	30 . . . 16
Java API - Random class	2^{48}	25 214 903 917	11	47 . . . 16

[2] Překladač GCC
[3] Překladače Watcom, Digital Mars, CodeWarrior, IBM VisualAge C/C++

Kvadratický[4] a kubický[5] kongruenční generátor

$$X_{n+1} = (dX_n^2 + aX_n + c) \mod m$$

$$X_{n+1} = (eX_n^3 + dX_n^2 + aX_n + c) \mod m$$

[4] QCG - Quadratical congruential generator
[5] CCG - Cubic congruential generator

Blum-Blum-Shub[6]

- Konkrétní varianta QCG
- Vzorec
$$X_{n+1} = X_n^2 \mod M,$$
kde $M = pq$ je součin velkých prvočísel. Ideálně
$$p \mod 4 = 3 \text{ a } q \mod 4 = 3$$
- Není vhodný pro simulace metodou Monte Carlo (pomalý), hodí se pro kryptografii

[6] BBSG

Zpožděný Fibonacciho generátor[7]

$$X_n = \bigoplus (X_{n-i_1}, \ldots, X_{n-i_j}) \mod m$$

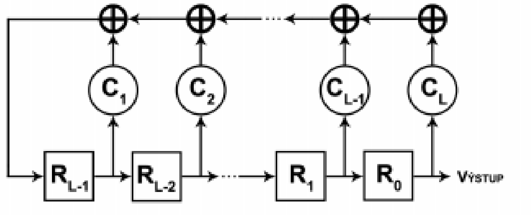
- Binární operace $\bigoplus$ (sčítání, odčítání, násobení, XOR)

[7] LFG - Lagged Fibonacci generator

Mersenne twister

- Jeden z nejlepších generátorů
- Navržený s ohledem na použití v simulacích metodou Monte Carlo
- Není vhodný pro kryptografii (ze znalosti jistého počtu členů lze odvodit pokračování posloupnosti)
- Výstupem posloupnost $uint32$, periodou některé z Mersennových prvočísel
- Na vygenerování seedu se často používá LCG

Lineární posuvný registr se zpětnou vazbou[8]



- L registrů, lineární binární operace $\bigoplus$ (nejčastěji XOR), charakteristický polynom
- V jednom taktu: obsah registru R_i se přesune do R_{i-1}, R_0 se předá na výstup; pro registr zpětné vazby R_{L-1} se spočítá nový obsah (pomocí char. polynomu)

[8] LFSR - Linear feedback shift register

Kryptografie

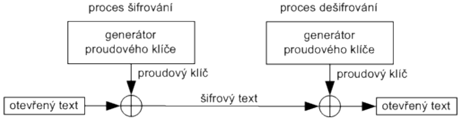
- Asymetrická
- Symetrická
  - Blokové šifry
  - Proudové šifry

Proudové šifry

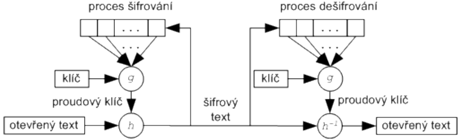
- Nejsou tak bezpečné blokové šifry
- Používáno hlavně v telekomunikacích a u malých zařízení s nízkým výkonem (mobilní telefon, apod.)

Princip

- Můžeme na ně nahlížet jako na variantu Vernamovy šifry, místo jednorázové tabulky ale používáme PRNG
- **Synchronní**



- **S vlastní synchronizací (asynchronní)**



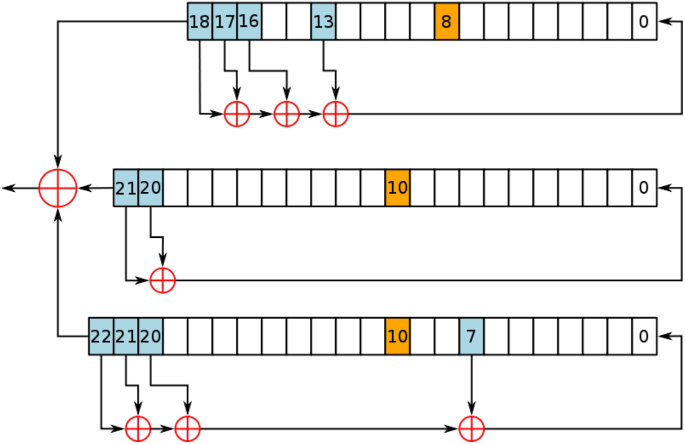
Možnosti prolomení

- **Opětovně použitý klíč** - Pokud máme 2 zprávy A, B a obě byly zašifrovány stejným klíčem K
  $E(A) = A$ **XOR** $C(K)$ a $E(B) = B$ **XOR** $C(K)$
  můžeme získat
  $E(A)$ **XOR** $E(B) = A$ **XOR** B,
  nyní potřebujeme znalost alespoň fragmentů původních zpráv a postupujeme střídavým doplňováním
- **Substituční útok** - Druh man-in-the-middle útoků, pokud víme, že v zašifrované zprávě je na nějakém místě konkrétní údaj, můžeme ho změnit „přixorováním“ rozdílu
  $(C(K)$ **XOR** $1000CZK)$ **XOR** $(9000USD$ **XOR** $1000CZK) =$
  $C(K)$ **XOR** $9000USD$

Šifrování GSM - A5/x, kde $x \in \{0, 1, 2\}$

- Šifrování komunikace mobilních telefonů
- Různé varianty
  - A5/1 nejsilnější verze (používáno např. v ČR)
  - A5/2 zeslabená verze (používáno např. v Keni)
  - A5/0 bez šifrování
- Standardy z roku 1987, A5/1 a A5/2 původně tajné, později zjištěné reverzním inženýrstvím (1994)
- Známo mnoho druhů útoků, poslední jsou velice úšpěšné
  - 4TB tzv. rainbow tabulek, pomocí kterých lze dešifrovat libovolný hovor, tabulky jsou veřejně dostupné)

Schéma



Odposlech

- Není možné provádět v reálném čase
- Stačí vybavení za zhruba 40 000 Kč
- V České republice stále používáno snadno napadnutelný 64bitový A5/1
- Plánovaný přechod na 128bitový A5/3

Odposlech

1. Zachycení signálu
2. Zpracování signálu
3. Dekódování pomocí rainbow tabulek

Shrnutí

- Náhodnost
- Testování generátorů
- Nejpoužívanější generátory - lineární kongruenční, Blum-Blum-Shub, Mersenne twister, lineární posuvný se zpětnou vazbou
- Proudové šifry

Reference

D. Knuth: **Umění programování, 2.díl - Seminumerické algoritmy**, Computer Press, 2010.

WIKIPEDIA - The Free Encyclopedia, hesla: A5/1, Linear feedback shift register, Linear congruential generator, Pseudorandom number generator, Blum Blum Shub, Lagged Fibonacci generator, Mersenne twister, Stream cipher, Stream cipher attack.

A. Rukhin, J. Soto, J. Nechvatal, M. Smid, E. Barker, S. Leigh, M. Levenson, M. Vangel, D. Banks, A. Heckert, J. Dray, S. Vo: **A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications**, 2010.

O. Málek: **Generování pseudonáhodných dat založené na použití LFSR** (bakalářská práce), Masarykova univerzita, 2007.

M. Kaňok: **Generátory pseudonáhodných čísiel v metódach Monte Carlo**, Československý časopis pro fyziku, 2008/6.

M. Rohlík: **Využití proudových šifer v současnosti**.

Děkuji za pozornost.