Zápočtová písemka číslo 2 SKUPINA B

Praxe

1. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány variety W_1 a W_2, kde

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}]_\lambda \quad \text{a} \quad W_2 \equiv \begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 1 \end{array}$$

   Určete, o jaké lineární variety jde. Najděte jejich průnik a určete jejich vzdálenost.

   [3,5 bodu]

2. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice $\mathbb{A}$ a rozhodněte, zda existuje regulární matice $\mathbb{X}$ a diagonální matice $\mathbb{D}$ takové, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$, když $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pokud ano, matice $\mathbb{X}$ a $\mathbb{D}$ najděte.

   [3,5 bodu]

3. Najděte ortogonální doplněk $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, je-li v $\mathbb{R}^4$ definován $\mathbb{A}$-skalární součin, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

   [3 body]

Teorie

1. Vyslovte precizně obě věty, které dávají do souvislosti lineární variety a posunuté vektorové podprostory. Jejich pomocí vysvětlete, proč řešení soustavy lineárních algebraických rovnic pro n reálných neznámých tvoří lineární varietu v $\mathbb{R}^n$.

   [4 body]

2. Definujte pozitivně definitní matici. Co víte o jejím spektru? Uveďte dvě kritéria pro určení pozitivní definitnosti matice.

   [3,5 bodu]

3. Definujte vlastní číslo a vlastní vektor. Co splňují vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům?

   [2,5 bodu]