Zápočtová písemka číslo 1 SKUPINA B

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ nalezněte $A\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$ a $A^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, tj. množinu všech vektorů $\vec{x}$, které splňují $A\vec{x} = \vec{b}$, pokud lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je zadáno pomocí své matice ve standardních bázích
$$ {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. $$
[2,5 bodu]

2. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor V:
$$ V = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda. $$
Najděte ortogonální průmět vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ do V, je-li
$$ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. $$
Všimněte si, že generátory V tvoří jeho OG bázi.
[3,5 bodu]

3. Určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ má soustava LAR $\mathbb{A}\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ jediné řešení v $\mathbb{R}^3$, je-li
$$ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 2\alpha & 0 \end{pmatrix}. $$
V takovém případě řešení najděte pomocí výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$. Třetí složku řešení vypočtěte také Cramerovým pravidlem (z výpočtu musí být zřejmé, jak jste postupoval(a)).
[4 body]

Teorie

1. Vyslovte Pythagorovu větu. Ověřte její platnost pro konkrétní dva vektory z unitárního prostoru $\mathbb{C}^3$.
[3 body]

2. Vyslovte Cramerovo pravidlo. V čem spočívá jeho výhoda a v čem jeho nevýhoda ve srovnání s Gaussovou eliminací?
[4 body]

3. Definujte hodnost matice. Co víte o hodnosti součinu matic?
[3 body]