Zápočtová písemka číslo 1 SKUPINA A

Praxe

1. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte množinu všech řešení soustavy

$$\mathbb{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   [3 body]

2. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán soubor vektorů:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

   Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu tento soubor ortogonalizujte, tj. najděte OG soubor, který má stejný lineární obal.

   [3 body]

3. Určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje $\mathbb{A}^{-1}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 2\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

   Prvek $(\mathbb{A}^{-1})_{32}$ najděte také pomocí matice adjungované (z výpočtu musí být zřejmé, jak jste postupoval(a)).

   [4 body]

Teorie

1. Definujte ortogonální doplněk podprostoru. Uveďte alespoň dvě jeho vlastnosti.

   [3 body]

2. Definujte algebraický doplněk prvku $\mathbb{A}_{ij}$ (tedy prvku, který je v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbb{A}$). Jak se pomocí algebraických doplňků, tj. pomocí tzv. adjungované matice, spočte $\mathbb{A}^{-1}$? V čem spočívá výhoda a v čem nevýhoda ve srovnání s úplnou Gaussovou eliminací k výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$?

   [4 body]

3. Definujte inverzní matici. Jak vypočtete $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$ a jak $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$, jsou-li matice $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$ odpovídajícího rozměru?

   [3 body]