Lineární geometrie

Jsou-li lineární variety zadány v prostorech $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, dělejte si náčrty situací!

Různé zápisy lineárních variet

POZOR! Ve výsledcích je vždy uvedena jen jedna z možností. Je na vás, abyste ověřili, že váš výsledek popisuje stejnou lineární varietu.

1. Nechť $W \subset \mathbb{R}^2$, kde
$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}]_\lambda.$$
Napište směrovou rovnici W, parametrické rovnice W, normálovou (neparametrickou) rovnici W a zapište W ve tvaru afinního obalu.

   Řešení popořadě:
$$W \equiv \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$
$$W \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1+3t, \\ y & = & 1+4t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}$$
$$W \equiv \ 4x \ - \ 3y \ = \ 1$$
$$W = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}]_\alpha$$

2. Nechť $W \subset \mathbb{R}^2$, kde
$$W = [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}]_\alpha.$$
Napište parametrické rovnice W.

   Řešení:
$$W \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 2-3t, \\ y & = & 1+2t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Nechť $W \subset \mathbb{R}^2$, kde
$$W \equiv y = 2.$$
Napište parametrické rovnice W.

   Řešení:
$$W \equiv \begin{array}{rcl} x & = & t, \\ y & = & 2, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Nechť $W \subset \mathbb{R}^3$, kde
$$W \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 1, \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -2. \end{array}$$
Najděte parametrické rovnice W.

   Řešení:
$$W \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 3-7t, \\ y & = & -2+3t, \\ z & = & 2-5t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Nechť $W \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

Napište parametrické rovnice W.

Řešení:

$$W \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & t & - & r, \\ y & = & -1 & + & 4t & + & 2r, \\ z & = & & & t & + & 2r, \end{array} \quad t,\ r \in \mathbb{R}.$$

6. Nechť $W \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & t, \\ y & = & 2 & + & 3t, \\ z & = & & & 2t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Najděte neparametrické rovnice W.

Řešení:

$$W \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & + & z & = & 2, \\ 3x & + & y & & & = & 5. \end{array}$$

7. Nechť $W \subset \mathbb{R}^4$, kde

$$W \equiv 2x - 3y = -4.$$

Najděte parametrické rovnice W.

Řešení:

$$W \equiv \begin{array}{rcrcccr} x & = & -2 & & & + & 3s \\ y & = & & & & & 2s \\ z & = & & & r & & \\ u & = & & t & & & \end{array} \quad t,\ r,\ s \in \mathbb{R}.$$

8. Zjistěte, zda následující body z $\mathbb{R}^4$ leží v jedné přímce nebo v jedné rovině.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Návod: Uvědomte si, že nejmenší lineární varieta, která body obsahuje, je jejich afinní obal.

Řešení: Body neleží ani v přímce ani v rovině.

Průnik a vzájemná poloha lineárních variet

Rozmyslete si, jaké všechny případy mohou pro lineární variety v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ nastat. To vám pomůže i při kontrole výsledků. Například zjistíte-li, že dvě přímky jsou rovnoběžné a v jejich průniku leží jediný bod, hned víte, že jste někde udělali chybu!

Ve všech příkladech zní zadání stejně: Určete vzájemnou polohu a najděte průnik lineárních variet W_1 a W_2.

Přímky v $\mathbb{R}^2$

1. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t, \\ y & = & -1 & + & 2t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad W_2 \equiv -2x + y = 3.$$

   Řešení: W_1 a W_2 rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

2. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t, \\ y & = & -1 & + & 2t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad W_2 \equiv -2x + y = -3.$$

   Řešení: W_1 a W_2 rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = W_1 = W_2$.

3. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde

$$W_1 \equiv x + y = 1, \qquad W_2 \equiv x - y = 3.$$

   Řešení: W_1 a W_2 různoběžné a $W_1 \cap W_2 = \{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

Přímky v $\mathbb{R}^3$

1. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & 3t, \\ y & = & & & 2t, \\ z & = & & & t, \end{array} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

   Řešení: W_1 a W_2 mimoběžné.

2. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1, \\ x - y & = & 2, \end{array} \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rrcrcl} 2x & & + & z & = & 3, \\ & 2y & + & z & = & 1. \end{array}$$

   Řešení: W_1 a W_2 rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

3. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

   Řešení: W_1 a W_2 různoběžné a $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Přímka a rovina v $\mathbb{R}^3$

1. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & -2, \\ 2x & - & y & & & = & 2. \end{array}$$

Řešení: W_1 a W_2 různoběžné a $W_1 \cap W_2 = \left\{ \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 9 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

Řešení: W_1 a W_2 rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

3. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

Řešení: W_1 a W_2 rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = W_2$.

Roviny v $\mathbb{R}^3$

1. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 3t + s, \\ y & = & 1 + t - s, \\ z & = & 1 + t + s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Řešení: W_1 a W_2 rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

2. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & 3t & + & s, \\ y & = & & & t & - & s, \\ z & = & & & t & + & s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Řešení: W_1 a W_2 rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = W_1 = W_2$.

3. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv 2x - y = 2.$$

Řešení: W_1 a W_2 různoběžné a $W_1 \cap W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$.

4. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & & + & 2t & + & 3s, \\ y & = & -1 & & & + & s, \\ z & = & & & t & + & s, \end{array} \quad t,s \in \mathbb{R}, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & & & & & s, \\ y & = & -2 & & & + & 2s, \\ z & = & & & t & + & s, \end{array} \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

Řešení: W_1 a W_2 různoběžné a $W_1 \cap W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$.

5. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv 2x + 3y + 4z = 2, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & + & t, & & \\ y & = & 4 & - & 2t & - & 4s, \\ z & = & -3 & + & t & + & 3s, \end{array} \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

Řešení: W_1 a W_2 rovnoběžné a $W_1 \cap W_2 = W_1 = W_2$.

Průnik a vzájemná poloha lineárních variet v $\mathbb{R}^4$

1. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, kde

$$W_1 \equiv \begin{array}{ccccccccc} -x & + & 5y & + & z & - & 4u & = & 1, \\ x & + & y & + & z & - & 2u & = & 2, \end{array} \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

Řešení: W_1 a W_2 jsou rovnoběžné roviny a $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

2. Nechť W_1, W_2 jsou dvě lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$. Rozhodněte, o jaký druh variet se jedná a jakou mají vzájemnou polohu a průnik, jestliže W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující body

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & - & 2t & & \\ y & = & 1 & - & 3t & + & 7s \\ z & = & 1 & + & 2t & - & 2s \\ u & = & -3 & + & t & - & 3s \end{array} \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

Řešení: W_1 je přímka a W_2 je rovina. Jsou mimoběžné ($W_1 \cap W_2 = \emptyset$).

3. Nechť $W_1,\ W_2$ jsou dvě lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně

$$W_1 \equiv \begin{array}{ccccccc} x & = & -2 & + & t & + & 2s \\ y & = & 2 & + & t & + & 2s \\ z & = & 3 & + & t & + & 2s \\ u & = & 2 & + & t & + & 2s \end{array} \quad t,\ s \in \mathbb{R},$$

$$W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & & & = & -1 \\ x & - & y & + & z & - & u & = & -3 \end{array}.$$

Rozhodněte, o jaký druh variet se jedná a jakou mají vzájemnou polohu a průnik.

Řešení: W_1 je přímka a W_2 je rovina. Jsou různoběžné a $W_1 \cap W_2 = \{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

4. Nechť $W_1,\ W_2$ jsou dvě lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$, kde W_1, W_2 jsou zadány následovně

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 4 & + & t & + & s \\ y & = & -1 & + & t & & \\ z & = & -2 & + & t & + & s \\ u & = & -1 & + & t & + & s \end{array} \quad t,\ s \in \mathbb{R},$$

$$W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 4z & + & u & = & 6 \\ x & + & y & - & 2z & - & u & = & 6 \\ x & & & + & z & & & = & 6. \end{array}$$

Rozhodněte, o jaký druh variet se jedná a jakou mají vzájemnou polohu a průnik.

Řešení: W_1 a W_2 jsou různoběžné roviny a $W_1 \cap W_2 = \{\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

5. Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, kde

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & - & u & = & 1, \\ x & + & 2y & - & z & + & u & = & 2, \end{array} \qquad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

Pro jaké $\beta \in \mathbb{R}$ jsou lineární variety W_1 a W_2

(a) rovnoběžné,

(b) různoběžné?

Řešení: W_1 a W_2 rovnoběžné pro $\beta = -1$ a nejsou různoběžné pro žádné β.

Metrická geometrie

1. Určete vzdálenost bodů $\vec{x}$ a $\vec{y}$

(a) v $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: 4.

(b) v $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix},\ \vec{y} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Řešení: 5.

2. Určete vzdálenost bodu $\vec{x}$ od podprostoru P

(a) v $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ P = [\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}]_\lambda.$$

Řešení: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(b) v $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix},\ P = [\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}]_\lambda.$$

Řešení: $\frac{\sqrt{26}}{2}$.

3. Určete vzdálenost lineárních variet W_1 a W_2

(a) v $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x &=& 1 + 3t + s, \\ y &=& t - s, \\ z &=& t + s, \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Řešení: 0.

(b) v $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcl} -x &+& 5y &+& z &-& 4u &=& 14, \\ x &+& y &+& z &-& 2u &=& 4, \end{array} \qquad W_2 = [\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\6\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix}]_\alpha.$$

Řešení: $\sqrt{6}$.