Vlastní čísla a $\mathbb{A}$-skalární součin

Základní úlohy:

- nalézt vlastní čísla a vlastní vektory matice
- rozhodnout, zda je daná matice diagonalizovatelná (případně v závislosti na parametru)
- pokud je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná, nalézt matici $\mathbb{X}$ takovou,že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$
- ve speciálních jednoduchých případech rozhodnout, zda jsou dvě matice podobné

1. Určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná.
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha - 2 & 2 - \alpha \\ 1 & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

2. Nalezněte všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice
$$\mathbb{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$
a rozhodněte, zda je tato matice diagonalizovatelná.

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A}$ a rozhodněte, zda je diagonalizovatelná.
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A}$ a rozhodněte, pro jaká α je $\mathbb{A}$ podobná matici $\mathbb{B}$.
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Které z následujících matic jsou
   (a) regulární,
   (b) symetrické,
   (c) ortogonální,
   (d) pozitivně definitní.
$$\mathbb{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Uvedte, co vše lze bez počítání říct o spektrech $\sigma(\mathbb{A}), \sigma(\mathbb{B}), \sigma(\mathbb{C})$ a o vlastních vektorech matic $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$. Poté vyšetřete vlastní čísla a vlastní vektory.

6. Zvolte si PD matici $\mathbb{A}$ 3×3, která není rovna jednotkové matici, a napište, jak vypadá $\mathbb{A}$-skalární součin vektorů $\vec{x}, \vec{y}$, pokud
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$