

Hyperbolické a cyklometrické funkce

Hyperbolické funkce

Hyperbolický sinus, cosinus, tangens a cotangens jsou definovány následovně

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Definiční obor je R pro \sinh , \cosh , tgh a $R \setminus \{0\}$ pro cotgh .

Rozmyslete si, že \sinh , tgh a cotgh jsou funkce liché a \cosh je funkce sudá.

Namalujte grafy.

Dokažte následující vztahy:

1.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

2.

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

3.

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

4.

$$\sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$$

$$\cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{2}$$

5. Najděte inverzní funkci k funkci $\sinh x : R \rightarrow R$ a k funkci $\cosh x : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow R$

6. Najděte inverzní funkci k funkci $\operatorname{tgh} x : R \rightarrow R$ a k funkci $\operatorname{cotgh} x : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow R$

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou definovány následovně

$\arcsin x$ je inverzní funkce k $\sin x : \langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$

$\arccos x$ je inverzní funkce k $\cos x : \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$

$\operatorname{arctg} x$ je inverzní funkce k $\operatorname{tg} x : \langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow R$

$\operatorname{arccotg} x$ je inverzní funkce k $\operatorname{cotg} x : \langle 0, \pi \rangle \rightarrow R$

Rozmyslete si, že \arcsin a arctg jsou funkce liché.

Namalujte grafy.

1. Dokažte následující vztahy:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pro } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{pro } x > -1 \\ -\frac{3\pi}{4} & \text{pro } x < -1 \end{cases}$$

2. Zjednodušte

$$\arcsin \sin x$$

$$\sin \arcsin x$$

$$\arccos \cos x$$

$$\cos \arccos x$$

$$\operatorname{arctg} \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{arccotg} \operatorname{cotg} x$$

$$\operatorname{cotg} \operatorname{arccotg} x$$