Neurčitý integrál racionálních funkcí

Integrál typu $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx$, kde p, q jsou polynomy s reálnými koeficienty řešíme následujícím způsobem:

- pokud st$p \geq$ st$q$, pak polynomy dělíme a dostaneme $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx = \int k(x)\ dx + \int \frac{\hat{p}(x)}{q(x)}\ dx$, kde k je polynom a st$\hat{p} <$ st$q$
- rozložíme $q(x)$ na kořenové činitele

  $$q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\dots\cdot(x-\alpha_j)^{k_j}(x-\beta_1)^{l_1}(x-\overline{\beta_1})^{l_1}\cdot\dots\cdot(x-\beta_m)^{l_m}(x-\overline{\beta_m})^{l_m},$$

  kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ a $\beta_i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, potom $\frac{\hat{p}(x)}{q(x)}$ lze rozložit na parciální zlomky

  $$\begin{aligned} \frac{\hat{p}(x)}{q(x)} \quad = \quad & \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{A_1^{(2)}}{x-\alpha_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \\ & \\ & + \frac{A_1^{(j)}}{x-\alpha_j} + \frac{A_2^{(j)}}{(x-\alpha_j)^2} + \dots + \frac{A_{k_j}^{(j)}}{(x-\alpha_j)^{k_j}} + \\ & + \frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2-2Re(\beta_1)+|\beta_1|^2} + \frac{B_2^{(1)}x+C_2^{(1)}}{(x^2-2Re(\beta_1)+|\beta_1|^2)^2} + \dots + \frac{B_{l_1}^{(1)}x+C_{l_1}^{(1)}}{(x^2-2Re(\beta_1)+|\beta_1|^2)^{l_1}} + \\ & \\ & + \frac{B_1^{(m)}x+C_1^{(m)}}{x^2-2Re(\beta_m)+|\beta_m|^2} + \frac{B_2^{(m)}x+C_2^{(m)}}{(x^2-2Re(\beta_m)+|\beta_m|^2)^2} + \dots + \frac{B_{l_m}^{(m)}x+C_{l_m}^{(m)}}{(x^2-2Re(\beta_m)+|\beta_m|^2)^{l_m}} \end{aligned}$$

  a jednotlivé členy se naučíme integrovat

Najděte neurčitý integrál následujících racionálních funkcí

1. $$\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2\ dx$$
2. $$\int \frac{dx}{x^3+1}$$
3. $$\int \frac{x+1}{(x^2-x+1)^3}\ dx$$
4. $$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$$
5. Odvoďte rekurentní vztah pro $I(n),\ n \in \mathbb{N}_0$, kde
   $$I(n) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$
6. $$\int \frac{dx}{x^4+1}$$
7. $$\int \frac{dx}{x^6+1}$$

8.
$$\int \frac{dx}{x^7+1}$$

9.
$$\int \frac{x^3+6x^2+12x+6}{x^3+6x^2+11x+6}\ dx$$

10.
$$\int \frac{x\ dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

11.
$$\int \frac{dx}{x^4-1}$$

12.
$$\int \frac{x\ dx}{x^8-1}$$

13.
$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\ dx$$

14.
$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\ dx$$

15.
$$\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\ dx$$

16.
$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\ dx$$

17.
$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\ dx$$

18.
$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$$