Integrál typu $\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\ dx$

Integrál typu $\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\ dx$, kde

$$R(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)},$$

kde p, q polynomy o dvou proměnných s reálnými koeficienty, budeme počítat pomocí metod, které už známe (substituce, zpětná substituce, per partes), a ve složitějších případech převádět pomocí Eulerových substitucí na integrál z racionální funkce.
Eulerovy substituce:

- pro $a > 0$
$$y := \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{a}x$$
- pro $c > 0$ volíme y tak, aby
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xy \pm c$$
- pokud $ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, kde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, volíme y tak, aby
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = y(x-\alpha_1)$$

Ověřte následující vztahy

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + c$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + c$

Pomocí per partes spočtěte následující neurčité integrály

1. $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$
2. $\int \sqrt{1+x^2}\ dx$
3. $\int \sqrt{x^2-1}\ dx$

Odvoďte rekurentní vztahy pro

1. $I(n) = \int (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\ dx$
2. $I(n) = \int (1+x^2)^{\frac{n}{2}}\ dx$
3. $I(n) = \int (x^2-1)^{\frac{n}{2}}\ dx$

Najděte neurčitý integrál následujících funkcí

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$$
2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$$
3. $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

4.
$$\int \frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}\ dx$$

5.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

6.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\ dx$$

7.
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}\ dx$$

8.
$$\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$$

Následující integrály vypočtěte pomocí substituce $\varphi(x) = \frac{1}{x}$

1.
$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

2.
$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+1}}$$

Pomocí Eulerových substitucí najděte neurčitý integrál následujících funkcí

1.
$$\int \frac{dx}{2x-1+\sqrt{x^2+1}}\ dx$$

2.
$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

Integrál typu $\int R(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\ dx$

Integrál typu $\int R(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\ dx,\ n \in \mathbb{N},\ ad - bc \neq 0$ se převede na integrál z racionální funkce pomocí substituce $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Převeďte neurčitý integrál následujících funkcí na neurčitý integrál racionálních funkcí

1.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$$

2.
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x+1)^2}}$$

Integrál typu $\int R(x^m(a+bx^n)^p)\ dx$

Integrál typu $\int R(x^m(a+bx^n)^p)\ dx,\ \ m,n,p \in \mathbb{Q},\ \ a,b,n,p \neq 0$ se převede na integrál z racionální funkce pomocí dvou substitucí:

1. $y = x^n$
2. pokud
   (a) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, substituujeme $z = (a+by)^{\frac{1}{s}}$, kde $s \in \mathbb{N}$ je jmenovatel p
   (b) $p \in \mathbb{Z}$, substituujeme $z = y^{\frac{1}{s}}$, kde $s \in \mathbb{N}$ je jmenovatel $\frac{m+1}{n}$
   (c) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, substituujeme $z = \left(\frac{a+by}{y}\right)^{\frac{1}{s}}$, kde $s \in \mathbb{N}$ je jmenovatel p

Čebyšev: pro ostatní případy neexistuje primitivní funkce v elementárním tvaru

Převeďte neurčitý integrál následujících funkcí na neurčitý integrál racionálních funkcí

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$$
2. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$
3. $$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{1}{2}}}\ dx$$