Mocninné řady

Je třeba znát pojmy: mocninná řada, poloměr konvergence, obor konvergence. Dále je třeba vědět, že mocninnou řadu lze uvnitř oboru konvergence derivovat člen po členu a že je reálná mocninná řada spojitá na celém svém oboru konvergence (Abelova věta). Také se hodí aplikovat mocninné řady pro sčítání nekonečých řad.

1. Najděte obor konvergence následující mocninné řady a pomocí znalosti derivace uvnitř oboru konvergence a Abelovy věty odvoďte explicitní vzorec pro její součet na oboru konvergence

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$

2. Najděte obor konvergence následující mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n$$

3. Najděte obor konvergence následující mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} (x-1)^n$$

4. Najděte obor konvergence následující mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sin n)^n} x^n$$

5. Najděte obor konvergence následující mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$$

6. Rozviňte následující funkce v mocninné řady se středem v bodě a

   (a)
   $$f(x) = \arcsin(x), \quad a = 0$$

   (b)
   $$f(x) = \ln(2+3x), \quad a = 1$$

   (c)
   $$f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3 + x^4), \quad a = 0$$

   (d)
   $$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2, \; f(0) = 1, \quad a = 0$$

   (e)
   $$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}, \quad a = 0$$

7. Sečtěte následující řady

(a)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot n$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right) x^n$$