Taylorův polynom

Je třeba znát: definici Taylorova polynomu a jeho tvar pro funkce $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ v bodě 0, Peanův tvar zbytku, větu o nejlepší aproximaci a o jednoznačnosti Taylorova polynomu (tj. je-li p polynom stupně $\leq n$ a $f(x) = p(x) + \omega(x)(x-a)^n$, kde $\lim_{x\to a} \omega(x) = 0$, pak p je n-tý Taylorův polynom f v a), vztah mezi Taylorovým polynomem funkce a Taylorovým polynomem její derivace, Lagrangeův a Cauchyův tvar zbytku v Taylorově vzorci

Pomocí Taylorových polynomů známých funkcí a jednoznačnosti Taylorova polynomu najděte

1. n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \ln(x+5)$ v bodě 0
2. $T_4(x)$ funkce $f(x) = e^{2x-x^2}$ v bodě 0
3. $T_5(x)$ funkce $f(x) = \sin(\sin x)$ v bodě 0
4. $T_5(x)$ funkce $f(x) = x\sqrt[3]{1-x^2}$ v bodě 0

Pomocí Peanova tvaru zbytku spočtěte

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x^3\sqrt{1-x^2}}{x^5}$$
2. $$\lim_{x\to +\infty} (x^3 - x^2 + \tfrac{x}{2})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}$$

Pomocí Langrangeova tvaru zbytku

1. spočtěte $\ln(1,1)$ na 5 desetinných míst
2. odhadněte chybu v $\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!}$ pro $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$
3. určete, jaká x můžeme dosazovat do $\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$, aby chyba byla menší než 10^{-4}

Najděte vzorce pro výpočet

1. $\sqrt[10]{1027}$
2. e

Určete $f^{(100)}(0)$ pro $f(x) = e^{x^2}$

Pomocí vztahu mezi Taylorovým polynomem funkce a Taylorovým polynomem její derivace najděte

1. n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \mathrm{arctg} x$ v bodě 0
2. n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \mathrm{arcsin} x$ v bodě 0

Najděte

1. $T_5(x)$ funkce $f(x) = e^{-x^2} \cdot \arcsin x$ v bodě 0
2. $T_5(x)$ funkce $f(x) = \mathrm{tg} x$ v bodě 0

Spočtěte

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x \cdot \mathrm{cotg} x}{x^2}$$

2.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\mathrm{cotg} x}$$

3.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arcsin x}{\mathrm{tg} x-\mathrm{arctg} x}$$

4.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(\sin^2 x)-\cosh^2(\mathrm{arctg}^2 x)}{\ln(1+x^2+x^4)-\ln(1+x^2-x^4)}$$

Kombinací l'Hospitala a Taylora vypočtěte

$$\lim_{x\to 0}\left(\cosh^2 x^2-\cos^2 x^2\right)^{\frac{1}{\ln|x|}}$$

V závislosti na $n\in\mathbb{N}$ rozhodněte o hodnotě limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin x}-e^{\sin x}}{x^n}$$