Průběhy křivek

Vyšetřování funkcí zadaných parametricky

Nechť $\Phi : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je křivka definovaná pro každé $t \in A$ rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}$$

Pokud φ je prostá funkce na $B \subset A$, pak pro $t \in B$ popisují výše uvedené rovnice funkci $f = \psi \circ (\varphi/_B)^{-1}$. Jsou-li navíc funkce φ a ψ spojité, či dokonce diferencovatelné, je výhodné vyšetřovat funkci přímo v jejím parametrickém tvaru. Mají-li totiž výrazy na pravé straně smysl, pak platí:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{t \to t_0} \psi(t), \quad \text{kde } \lim_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0,$$

$$f'(x_0) = \frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\varphi}(t_0)}, \quad f''(x_0) = \frac{\ddot{\psi}(t_0)\dot{\varphi}(t_0) - \ddot{\varphi}(t_0)\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\varphi}(t_0)^3}, \text{ kde } \varphi(t_0) = x_0,$$

$$\text{asymptoty} \quad k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \to t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \quad q = \lim_{t \to t_0} (\psi(t) - k\varphi(t)), \text{ kde } \lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \pm\infty.$$

Při vyšetřování grafů následujících křivek využijeme toho, že jsou sjednocením grafů konečně mnoha parametricky zadaných funkcí.

Vyšetřete průběh následujících křivek

1. $$\begin{aligned} x &= 2t - t^2, \\ y &= 3t - t^3 \end{aligned}$$

2. $$x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t^2 - 1}$$

3. nechť $a > 0$
$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t \end{aligned}$$

4. nechť $a > 0$
$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}$$

5. nechť $a > 0$
$$\begin{aligned} x &= a(\sinh t - t), \\ y &= a(\cosh t - 1) \end{aligned}$$

Nechť $a > 0$, vyšetřete průběh následujících křivek zadaných v polárních souřadnicích

1. $$\rho = a(1 + \cos\varphi)$$

2. $$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

Vyšetřete průběh následujících křivek pomocí vhodné parametrizace

1. nechť $a > 0$
$$x^3 + y^3 = 3axy$$

2.
$$(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 16(x^2 + y^2)$$

3. nechť $a > 0$
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

4.
$$x^y = y^x$$

5.
$$(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2$$

6.
$$x^4 + y^4 = x^2 + y^2$$