

Limity posloupností 9.11. - 13.11.2009

Limity sevřených posloupností

Je třeba znát větu o limitě součtu, rozdílu, součinu, podílu posloupností, dále větu o limitě sevřené posloupnosti a větu:

Nechť (a_n) , (b_n) jsou reálné posloupnosti, nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \leq b_n$ pro každé $n \geq n_0$, pak

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

1. Spočítejte následující limity v $\overline{\mathbb{R}}$

(a)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} \right)$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + n^2}} \right)$$

(e) Příklad na plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 2^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 3^4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + n^4}} \right)$$

(f)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

(g) Pokud dokážete tzv. podílové kritérium, můžete ho využít k výpočtu následujících limit:

Nechť (a_n) má nenulové členy, pokud

i. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, pak $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$,

ii. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, pak $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty$

i.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$$

ii.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}$$

iii.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!}$$

iv.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n^{10}}$$

v.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

vi.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!}$$

vii.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{n^2}}{n!}$$

viii.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{2k^2 + 1}{3k^2 - 1}$$

(h) Najděte posloupnost (a_n) , pro kterou

- i. $\lim_{n \rightarrow +\infty} [a_n]$ existuje a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ neexistuje
- ii. $\lim_{n \rightarrow +\infty} [a_n]$ neexistuje a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ existuje

Limity posloupností odvozených od $(\sqrt[n]{n})$, $(\sqrt[n]{a})$, $(\sqrt[n]{n!})$

Je třeba znát větu o limitě součtu, rozdílu, součinu, podílu posloupností, dále větu o limitě sevřené posloupnosti a vědět:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{a}) = 1, \quad a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n!}) = +\infty$$

Spočtěte následující limity v $\overline{\mathbb{R}}$

1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{4n^3 + 5}$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n + n + 1}$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}$$

Limita exponenciály a logaritmu

Je třeba znát následující věty:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e$ pro každou reálnou posloupnost (k_n) splňující $\lim_{n \rightarrow +\infty} |k_n| = +\infty$
- Definujme $e^{+\infty} := +\infty$ a $e^{-\infty} := 0$. Pak pro každé $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, pak $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_n} = e^a$
- Nechť (a_n) je kladná posloupnost. Pokud
 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in (0, +\infty)$, pak $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln a_n = \ln a$
 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, pak $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln a_n = +\infty$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, pak $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln a_n = -\infty$

Spočtěte následující limity v \overline{R}

1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2}$$

4.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

5.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

6.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n$$

7.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

8.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

9.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

10.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$$

11.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2+1}\right)^n$$

12.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

13. K zapamatování!

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

14.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\ln 10n}$$

15.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n^2 + 3n - 2)}{\ln(n^5 + n + 1)}$$

16.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + 3^n)}{\ln(2 + 2^n)}$$

17.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}$$

18.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}$$

19. Uspořádejte následující posloupnosti podle rychlosti růstu

$$(\ln n), (n^n), (n), (2^n), (n!), (\sqrt{n})$$

Bolzanova-Cauchyova podmínka

Pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky zjistěte, zda následující posloupnosti konvergují

1.

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{\sin k!}{2^k} \right)$$

2.

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)$$

3.

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$$

Eulerova konstanta

Ukažte, že

1. (x_n) , kde $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$, je ostře klesající

2. (y_n) , kde $y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$, je ostře rostoucí

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n =: \gamma$ tzv. Eulerova konstanta $\gamma \doteq 0.577216 \dots$

Spočtěte

1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k}$$