# Limity posloupností 2.11. - 6.11.2009

## Limity polynomů a racionálních funkcí

Je třeba znát větu o limitě součtu, rozdílu, součinu, podílu posloupností a znát limitu $(n^k)$ pro každé $k \in Z$, a to v $\overline{R}$ i v $\overline{C}$

Není-li stanoveno jinak, počítejte u reálných posloupností jejich limitu v $\overline{R}$

1. Spočtěte $\lim_{n\to+\infty}(n^5 - 1000n^4)$ v $\overline{R}$ a také v $\overline{C}$
2. Nechť $P_k(n)$ je polynom $k$-tého stupně proměnné $n$ s reálnými koeficienty, $k \geq 1$, určete $\lim_{n\to+\infty} P_k(n)$ v $\overline{R}$
3. Nechť $P_k(n)$ je polynom $k$-tého stupně proměnné $n$ s komplexními koeficienty, $k \geq 1$, určete $\lim_{n\to+\infty} P_k(n)$ v $\overline{C}$
4. Spočtěte $\lim_{n\to+\infty}((-1)^n \cdot n)$ v $\overline{R}$ a také v $\overline{C}$
5. Spočtěte $\lim_{n\to+\infty}(i^n \cdot n)$
6. Spočtěte $\lim_{n\to+\infty} \frac{2ni+5}{3ni+5}$
7. Spočtěte limity
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-4}{n+3}$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-4}{n^2+3}$
   (c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-4}{n^3+3}$
8. Nechť $P_k(n)$ a $Q_j(n)$ jsou polynomy $k$-tého a $j$-tého stupně proměnné $n$ s reálnými koeficienty, určete $\lim_{n\to+\infty} \frac{P_k(n)}{Q_j(n)}$ v $\overline{R}$
9. Nechť $P_k(n)$ a $Q_j(n)$ jsou polynomy $k$-tého a $j$-tého stupně proměnné $n$ s komplexními koeficienty, určete $\lim_{n\to+\infty} \frac{P_k(n)}{Q_j(n)}$ v $\overline{C}$
10. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+4}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}$$
11. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-3)^{20}(3n^2+1)^{15}}{(6n+1)^{50}}$$
12. Zjistěte, v kterém kroku postupu je chyba! Vypočtěte limitu správně! Nedělejte pak sami podobnou chybu!
   (a)
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(-1+(1-\frac{1}{n})\right)n\right) = \lim_{n\to+\infty}((-1+1)n) = \lim_{n\to+\infty} 0 \cdot n = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$
   (b)
   $$\lim_{n\to+\infty}\left((n-1)\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}((n-1)\cdot 0) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

(c)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{\frac{2}{n^2+2}} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

(d)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1+(1-\frac{1}{n})}{\frac{2}{n^2+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1+1}{\frac{2}{n^2+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{\frac{2}{n^2+2}} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

13.

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2})$$

14.

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \frac{1}{n^2} (\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2) \right)$$

15.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 \right|$$

## Limity odmocnin

Je třeba znát větu o limitě součtu, rozdílu, součinu, podílu posloupností, dále větu o limitě sevřené posloupnosti a větu: Nechť $(a_n)$ má nezáporné členy. Pokud $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \overline{R}$, pak $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, kde $\sqrt[k]{+\infty} := +\infty$.

Spočtěte následující limity v $\overline{R}$

1.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} - 3}{n^{\frac{1}{2}} - 2}$$

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{2n} \right)$$

3.

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$$

4.

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \sqrt{n+1} - \sqrt[3]{2n} \right)$$

5.

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \left( \sqrt{n^2 + \sqrt{n^4+1}} - n\sqrt{2} \right)$$

6.

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{4}{3}} \left( \sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1} \right)$$

7.

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}} \left( \sqrt{n+1} + \sqrt{2n} - \sqrt{3n+2} \right)$$

8.

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}} \left( \sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} - 3\sqrt{n+2} \right)$$

## Limity posloupností odvozených od $(a^n)$

Je třeba znát větu o limitě součtu, rozdílu, součinu, podílu posloupností, dále větu o limitě sevřené posloupnosti a větu: Nechť $a \in R$. Pak $\lim_{n\to+\infty} a^n$ má v $\overline{R}$ následující hodnotu:

$$\begin{array}{rc} 0 & \text{pro } |a|<1 \\ 1 & \text{pro } a=1 \\ +\infty & \text{pro } a>1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } a\le -1 \end{array}$$

Spočtěte následující limity v $\overline{R}$, cvičně uvažujte limity v příkladech 7. a 8. i v $\overline{C}$

1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-3)^n + 2^n}{(-3)^{n+1} + 2^{n+1}}$$

2. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{1+a^n}, \quad a \neq -1$$

3. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{2n+1}-3}{1+a^n}, \quad a \neq -1$$

4. $$\lim_{n\to+\infty} (a^3)^n$$

5. $$\lim_{n\to+\infty} (a^n)^3$$

6. $$\lim_{n\to+\infty} a^{3^n}$$

7. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{n^2} - (\frac{1}{3})^{n^2}}{(\frac{1}{2})^{n^2+1} - (\frac{1}{3})^{n^2+1}}$$

8. $$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{9}{10}\right)^{n!}$$

9. $$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{10}{9}\right)^{n!}$$