Posloupnosti a jejich limity 26.10. - 30.10.2009

Posloupnosti

Je třeba vědet, co je: posloupnost, monotonní (rostoucí, ostře rostoucí, klesající, ostře klesající) posloupnost, posloupnost vybraná z nějaké posloupnosti (podposloupnost)

1. Rozhodněte, zda je (a_n) monotonní (případně od kterého členu) a určete druh monotonie, pokud
   (a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
   (b) $a_n = \frac{2n+3}{n^2+3n+1}$
   (c) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} - \frac{(-1)^n}{n^2}$ (rozhodněte také o monotonii (a_{2n}) a (a_{2n+1}))
   (d) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$
   (e) $a_n = \frac{n^2}{n!}$
   (f) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$
   (g) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$
2. Rozhodněte, zda je (a_n) vybraná z (b_n) nebo naopak, tj. najděte (pokud to lze) (k_n) ostře rostoucí, $k_n \in N$, tak, že $b_n = a_{k_n}$ nebo $a_n = b_{k_n}$
   (a)
   $$a_n = \frac{n+2}{n+5}, \quad b_n = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]+2}{\left[\frac{n}{2}\right]+5}$$
   (b)
   $$a_n = \frac{n+2}{n+5}, \quad b_n = \frac{n^{\frac{3}{2}}+2}{n^{\frac{3}{2}}+5}$$
   (c)
   $$a_n = 3^{\sqrt{n}}, \quad b_n = 3^n$$

Limita posloupnosti

Je třeba znát: definici limity posloupnosti, větu o limitě vybrané posloupnosti, větu o limitě součtu, rozdílu, součinu, podílu posloupností

U reálných posloupností uvažujte jejich limitu v $\overline{R}$

1. Zapište pomocí kvantifikátorů
   (a) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -2$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existuje
   (c) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ neexistuje
   (d) $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq -\infty$
2. Z definice limity dokažte
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, kde $k \in N$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
   (c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+i} = 1$

(d) $\lim_{n\to+\infty} n \cdot i^n = \infty$

(e) $\lim_{n\to+\infty} 3n - n^2 = -\infty$

(f) $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

(g) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} = 0$

(h) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

(i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$

3. Nechť (a_n) je reálná (komplexní) posloupnost, nechť $a \in R(\in C)$, pak

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$$

4. Znáte větu: Nechť (a_n) je reálná monotonní posloupnost, pak $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existuje. Platí i opačná implikace?

5. Znáte větu: Nechť $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, pak (a_n) není shora omezená a je omezená zdola. Platí i opačná implikace?

6. Pomocí věty o limitě vybrané posloupnosti ověřte, že následující limity neexistují

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2+3(-1)^n}$

(b) $\lim_{n\to+\infty} i^n$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

(d) $\lim_{n\to+\infty} \cos \frac{2\pi n}{3}$

7. Platí následující věty?

Věta 0.1. *Nechť (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti takové, že $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existuje a $\lim_{n\to+\infty} b_n$ existuje. Potom $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n)$ existuje.*

Věta 0.2. *Nechť (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti takové, že $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existuje a $\lim_{n\to+\infty} b_n$ existuje. Potom $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n)$ existuje.*

Věta 0.3. *Nechť (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti takové, že $\lim_{n\to+\infty} a_n$ neexistuje a $\lim_{n\to+\infty} b_n$ neexistuje. Potom $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n)$ neexistuje.*