

Omezenost množin, supremum a infimum 12.10. - 16.10.2009

Nejprve dokončíme zobrazení.

Omezenost množin

Z teorie je třeba znát pojmy: množina omezená shora, omezená zdola, omezená

Rozhodněte o omezenosti zdola, omezenosti shora, resp. o omezenosti následujících množin

1.

$$\{3 - n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

2.

$$\{3 - x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

3.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 3 - x \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

4.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 6 \in (-1, +\infty)\}$$

5.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^{10} + 4x^7 - 33 = 0\}$$

6.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

7.

$$\{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

8.

$$\left\{ \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} \mid x > 1 \right\}$$

9.

$$\{x \in \mathbb{C} \mid |x - 1| < 2\}$$

10.

$$\{x \in \mathbb{C} \mid |x - 1| = |x + 1|\}$$

Jsou následující výroky ekvivalentní s definicí neomezenosti shora množiny $M \subset \mathbb{R}$?

1. $(\forall K \in \mathbb{R})(\exists x \in M)(K < x)$

2. $(\exists x \in M)(\forall K \in \mathbb{R})(K < x)$

3. $(\forall K \in \mathbb{R})(\exists x \in M)(K \leq x)$

4. $(\forall K > 0)(\exists x \in M)(K < x)$

5. $(\forall K < 0)(\exists x \in M)(K < x)$

Supremum a infimum

Je třeba znát: definici suprema a infima, minima a maxima podmnožin R

Dokažte, že dané číslo je supremum, resp. infimum množiny $M \subset R$. Rozhodněte, kdy jde o maximum, resp. minimum.

1.

$$M = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in N \right\}, \quad \sup M = 1, \quad \inf M = \frac{1}{2}$$

2.

$$M = \{n^2 + n + 1 \mid n \in N\}, \quad \sup M = +\infty, \quad \inf M = 3$$

3.

$$M = \left\{ \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5} \mid n \in N \right\}, \quad \sup M = \frac{7}{3}, \quad \inf M = 2$$

4.

$$M = \left\{ \frac{6n - 5}{27n - 9n^2 - 20} \mid n \in N \right\}, \quad \sup M = 0, \quad \inf M = \frac{-7}{2}$$

5.

$$M = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \mid n \in N \right\}, \quad \sup M = 1, \quad \inf M = 0$$

6.

$$M = \{n \in N \mid n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 < 60\}, \quad \sup M = \text{určete sami}, \quad \inf M = \text{určete sami}$$

7.

$$M = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in N\}, \quad \sup M = \text{určete sami}, \quad \inf M = \text{určete sami}$$

8.

$$M = \{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \mid n \in N\}, \quad \inf M = 0$$

9.

$$M = \left\{ \frac{x}{|x|+1} \mid x \in R \right\}, \quad \sup M = 1, \quad \inf M = -1$$

10.

$$M = \{x^3 - x^2 - x + 2 \mid x \in (0, 2)\}, \quad \sup M = 4, \quad \inf M = 1$$

11.

$$M = \left\{ \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + x} \mid x \in (0, +\infty) \right\}, \quad \sup M = 2, \quad \inf M = 1$$

Rozhodněte o pravdivosti následujících vět:

Věta 0.1. Pro každou $M \subset R$ existuje $\beta \in \overline{R}$ takové, že

1. $(\forall x \in M)(x < \beta)$
2. $(\forall \beta' < \beta)(\exists x \in M)(\beta' < x)$

Věta 0.2. Pro každou $M \subset R$ existuje $\alpha \in \overline{R}$ takové, že

1. $(\forall x \in M)(\alpha \leq x)$
2. $(\exists x \in M)(\forall \alpha' > \alpha)(x < \alpha')$