Zobrazení 5.10. - 9.10.2009

Z teorie je třeba znát pojmy: zobrazení (funkce), definiční obor a obor hodnot zobrazení, prosté zobrazení a zobrazení “na”, vzor a obraz množiny, inverzní zobrazení, skládání zobrazení a graf zobrazení, ekvivalence množin

1. Určete definiční obor D_f a obor hodnot H_f pro následující zobrazení $f : (R) \to R$

   (a)
   $$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

   (b)
   $$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

   (c)
   $$f(x) = 2^x + 2^{-x}$$

2. Pro následující zobrazení $f : (R) \to R$ určete obraz $f(A)$ množiny A, kde $A = (0, 1)$
   $$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

3. Pro následující zobrazení $f : R \to R$ určete vzor $f^{-1}(A)$ množiny A, kde $A = (0, 1\rangle$
   $$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

4. Rozhodněte, zda je následující zobrazení $f : N \to N$ prosté a zda je “na N”, dále najděte obraz a vzor množiny $\{3, 4, 5\}$
   $$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{pro } n \text{ sudé} \\ \frac{n+1}{2} & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$$

5. Ověřte, že následující zobrazení $f : N \to Z$ prosté a “na Z”, a najděte inverzní zobrazení k f
   $$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{pro } n \text{ sudé} \\ \frac{1-n}{2} & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$$

6. Rozhodněte, zda je následující zobrazení $f : N \times N \to N$ prosté a zda je “na N”, najděte vzor množiny $\{15\}$
   $$f(m, n) = m \cdot n$$

7. Určete H_f a rozhodněte, zda je zobrazení $f : R \to R$ prosté a zda je “na R”, dále určete, co je vzor množiny $\langle 1, 2)$
   $$f(x) = |x + 3|$$

8. Určete H_f a rozhodněte, zda je zobrazení $f : R \to R$ prosté a zda je “na R”, dále určete, co je vzor množiny $(0, 2)$ a $\langle 0, 2\rangle$
   $$f(x) = |x| + x$$

9. Určete H_f a rozhodněte, zda je zobrazení $f : R \to R$ prosté a zda je "na R", určete, co je vzor množiny $\{\frac{-2}{5}, \frac{2}{5}\}$, dále najděte všechna $a \in R$, pro která je $f^{-1}(\{a\})$ jednoprvková množina, a najděte všechna $a \in R$, pro která je $f^{-1}(\{a\})$ prázdná množina

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

10. Určte H_f pro následující zobrazení $f : R \to R$ a najděte vzor množiny $\{1, 2, 4\}$

$$f(x) = [x] = \text{největší celé číslo nepřevyšující } x$$

11. Nechť je dáno $f : C \to C$, najděte H_f, vzor množiny R, obraz imaginární osy a vzor množiny $\{x \in C \mid |x| = 1\}$

$$f(x) = x^2$$

12. Rozhodněte, zda je následující zobrazení $f : (R) \to R$ prosté a zda je "na"

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

13. Dokažte, že $f : \langle 3, +\infty) \to R$ je prosté, a najděte zobrazení f^{-1} inverzní k f, určete $D_{f^{-1}}$ a $H_{f^{-1}}$

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

14. Dokažte, že $f : (0, 1) \to R$ je prosté a "na"

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

15. Složte následující zobrazení $f : (R) \to R$ a $g : (R) \to R$ a určete definiční obory $f \circ g$ a $g \circ f$

(a)

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = x^2 - 1$$

(b)

$$f(x) = \mathrm{tg} x \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

(c)

$$f(x) = \sin x \qquad g(x) = 2x$$

16. Nechť jsou dána zobrazení $h : R \to R$ a $g : R \to R$ a víme, že $h = f \circ g$, najděte zobrazení f

$$h(x) = \frac{|x|}{x^2+1} \qquad g(x) = |x|$$

17. Nechť je dána posloupnost $a_n = n^2 + n - 1$, určete a_{2n}

18. O jakých množinách lze prohlásit na základě výsledků předchozích úloh, že jsou ekvivalentní?

19. Pomocí zobrazení $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ dokažte, že $(-1, 1) \sim R$

20. Rozmyslete si, jak z grafu funkce $f(x)$ vzniknou grafy funkcí

$$2f(x),\ \frac{1}{2}f(x),\ f(2x),\ f(\frac{x}{2}),\ f(x-1),\ f(x+1),\ f(-x),\ -f(x)$$