Matematická indukce, sumy a produkty, matematická logika 28.9. - 2.10.2009

Matematická indukce

Jde o následující vlastnost přirozených čísel: *Předpokládejme:*

1. *Nějaké tvrzení platí pro* 1.
2. *Platí-li tvrzení pro* $n \in N$, *pak platí také pro* $n + 1$.

Pak dané tvrzení platí pro všechna přirozená čísla.

Rozmyslete si, že také platí: *Předpokládejme:*

1. n_0 *je přirozené číslo.*
2. *Nějaké tvrzení platí pro* n_0.
3. *Platí-li tvrzení pro* $n \in N$, $n \geq n_0$, *pak platí také pro* $n + 1$.

Pak dané tvrzení platí pro všechna přirozená čísla větší nebo rovna n_0.

1. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla platí následující tvrzení

   (a)
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

   (b)
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   (c)
   $$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

   (d) Vzorec vhodný k zapamatování
   $$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

   (e) Vzorec vhodný k zapamatování (binomická věta)
   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

   (f) Vzorec vhodný k zapamatování (Moivreova věta)
   $$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos\varphi n + i\sin\varphi n)$$

2. Dokažte, že pro každé $n > 1$ platí

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

3. Pro která $n \in N$ platí $2^n > 2n + 1$ a pro která $2^n > n^2$? Dokažte.

4. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla platí následující tvrzení

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

5. Dokažte, že $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ je pro každé $n \in N$ dělitelné číslem 133.

6. Představte si, že naše bankovky jsou v hodnotách mocnin 3, tj. 1 Kč ($1 = 3^0$), 3 Kč, 9 Kč, atd. Přijde-li k nám údržbář, pak ať chce za opravu pračky jakoukoliv (celou) částku, jsme schopni mu ji zaplatit - za předpokladu, že jak on tak my máme od každé bankovky 1 kus. Dokažte.

Sumy a produkty

Pamatujte, že pro $a, b \in Z,\ b < a$

$$\sum_{k=a}^{b} a_k = 0 \qquad \text{prázdná suma je rovna 0}$$

$$\prod_{k=a}^{b} a_k = 1 \qquad \text{prázdný produkt je roven 1}$$

Ověřte a zapamatujte si:
posouvání mezí

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1-l}^{n-l} a_{k+l} \quad \text{pro každé } l \in Z$$

záměnu sum

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_{j,k}$$

vytýkání konstanty K

$$\sum_{k=1}^{n} (K \cdot a_k) = K \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\prod_{k=1}^{n} (K \cdot a_k) = K^n \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k$$

načítání konstanty

$$\sum_{k=1}^{n} K = K \cdot n$$

1. Vypočtěte následující sumy

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{20}(3i-7)$$

(c)

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=2}^{6}(1+i)(2+j)$$

2. Využijte znalosti $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3$ k výpočtu

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

3. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou členy aritmetické posloupnosti, tj. existuje $d \in R$ takové, že $a_{k+1} - a_k = d$ pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Jak vypadá člen a_n zapsaný pomocí členu a_1? Jak se dá psát $\sum_{k=1}^{n} a_k$ pomocí a_1 a a_n?

4. Určete součet geometrické posloupnosti, tj. $\sum_{k=1}^{n} q^k$.

5. Vypočtěte následující sumu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{2k+1}}$$

6. Vypočtěte následující sumu, uvažujte zvlášť n sudé a n liché

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$$

7. Vypočtěte následující sumu pomocí převedení na rozdíl sum

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

8. Vypočtěte pomocí záměny sum

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j}$$

9. Vypočtěte následující produkty

(a)

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

(b)

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{2}$$

(c)

$$\prod_{k=1}^{n} \sin(\frac{k\pi}{n})$$

(d)

$$\prod_{i,j,k=1}^{n} ijk$$

(e)

$$\sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{k} \frac{i-n-1}{i}$$

Matematická logika

Máme dva cíle:

1. Naučit se formulovat myšlenky jednoduše, přesně a elegantně
2. Umět najít pravdu

Výroková logika

- Výrok je tvrzení, o jehož pravdivosti lze rozhodnout.
- Z výroků se dají skládat další výroky konečným počtem aplikací logických spojek: negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence.

logická spojka	čteme	zapisujeme
negace	není pravda, že	$\neg$
konjunkce	a zároveň	$\wedge$
disjunkce	nebo	$\vee$
implikace	jestliže..., potom	$\Rightarrow$
ekvivalence	právě tehdy, když	$\Leftrightarrow$

- Hlavním úkolem je vyhodnocování pravdivosti výroků. Připomeňme: Je-li výrok pravdivý, má pravdivostní hodnotu 1. Je-li nepravdivý, má pravdivostní hodnotu 0.

  K vyhodnocování je třeba znát pravdivostní tabulku (definující význam logických spojek), kde A, B jsou výroky:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

- Pospojování konečného počtu výroků pomocí logických spojek nazveme
  - tautologií, pokud je výsledný výrok vždy pravdivý (nezávisí na pravdivosti výroků, které obsahuje)
  - kontradikcí, pokud je vždy nepravdivý
- Nechť $V(x)$ je výroková funkce definovaná na M, tj. dosadíme-li za x prvek z M, stává se $V(x)$ výrokem.
  - Častá úloha je najít maximalní $N \subset M$ takovou, že pro všechna $x \in N$ je výrok $V(x)$ pravdivý.

– *Obecný kvantifikátor*
Výrok $(\forall x \in M)V(x)$ je pravdivý, pokud pravdivostní hodnota $V(a) = 1$ pro každé a z M.
– *Existenční kvantifikátor*
Výrok $(\exists x \in M)V(x)$ je pravdivý, pokud pravdivostní hodnota $V(a) = 1$ aspoň pro jedno a z M.

1. Určete pravdivostní hodnotu výroku

$$\big((1 \geq 0) \wedge (0 = 1)\big) \Rightarrow \big((1 > 1) \wedge (1 > 0)\big)$$

2. Napište následující výroky ve tvaru implikace a rozhodněte o jejich pravdivosti
   (a) “$1 < 2$ jen tehdy, je-li $2 > 3$.”
   (b) “$1 < 2$ tehdy, je-li $2 > 3$.”
3. Určete pravdivost následujícího výroku “1.8.1900 byla středa tehdy a jen tehdy, když 2.8.1900 byl čtvrtek.”
4. Pro důkazy se nám hodí znát následující tautologie
   (a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (tzv. nepřímý důkaz)
   (b) $(\neg V \Rightarrow (C \wedge \neg C)) \Rightarrow V$ (tzv. důkaz sporem)
5. Ověřte a pak využívejte negování konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence výroků A, B:

výrok	negace
$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
$A \Leftrightarrow B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

6. Jaké podmínky musí splňovat $x \in R$, aby výrok
   (a) $(x > 0) \wedge (x > 1)$
   (b) $(x > 0) \wedge \neg(x > 1)$

   byl pravdivý?
7. Pro která $n \in N$ je výrok: “$\frac{n(n+1)}{2}$ je sudé číslo nebo n je liché číslo.” pravdivý?
8. Určete pravdivost následujících výroků v závislosti na hodnotě $x \in R$
   (a) “Je-li $\frac{1}{x} < 1$, pak odtud neplyne $x \neq \frac{1}{2}$.”
   (b) “Není pravda, že x^2 je větší než 0.”
   (c) $(x > 0) \Leftrightarrow (x^2 > 0)$
9. Zapište pomocí kvantifikátorů následující výroky a vyšetřete jejich pravdivost
   (a) “Pro každé reálné číslo x, kde $x > 1$, platí $x^2 - 1 > 0$.”
   (b) “Je-li x libovolné reálné číslo, pak existuje celé číslo n tak, že $x < n$.”

10. Procvičte si negování výroků na předchozích příkladech. Uvědomte si, že následující výroky jsou ekvivalentní:
"Není pravda, že pro každý prvek x množiny M je $V(x)$ pravdivý výrok."
"Existuje prvek x množiny M, pro který je $V(x)$ nepravdivý."

    Neboli v řeči matematické symboliky je pravdivý následující výrok pro libovolnou výrokovou funkci $V(x)$ na M:
    $$\neg(\forall x \in M)V(x) \Leftrightarrow (\exists x \in M)\neg V(x)$$

11. Přečtěte následující výroky zapsané pomocí kvantifikátorů a rozhodněte o jejich pravdivosti - všimněte si, že **pořadí obecného a existenčního kvantifikátoru nelze vždy zaměnit, aniž by se změnila pravdivost výroku!**
    (a) $(\forall x \in R)(\exists y \in R)(x > y)$
    (b) $(\exists y \in R)(\forall x \in R)(x > y)$
    (c) $(\forall a \in R)(\forall b \in R)\Big((a + b = 1) \Rightarrow \big((a \geq \frac{1}{2}) \vee (b \geq \frac{1}{2})\big)\Big)$

12. Dokažte sporem
    (a) Prvočísel je nekonečně mnoho.
    (b) Budiž a pevně zvolené reálné číslo. Nechť pro každé $\varepsilon > 0$ je $|a| < \varepsilon$. Potom $a = 0$.