

Derivace funkcí 7.- 11.12.2009

Je třeba znát větu o derivaci inverzní funkce, Darbouxovu větu a l'Hospitalovo pravidlo, dále je třeba vědět, jak vypadá tečna ke grafu funkce f v bodě a

1. Nederivujte mechanicky! Vždy nejdříve určete D_f a D'_f a poté aplikujte vzorce, které znáte, případně větu o derivaci inverzní funkce a zamyslete se nad tím, v kterých bodech definičního oboru je výsledek platný; ve zbývajících bodech vypočítejte derivace pomocí Darbouxovy věty, pokud jsou splněny její předpoklady!

(a)

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{3}$$

(b)

$$f(x) = \arccos \cos^2 x$$

(c)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

(d)

$$f(x) = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$$

(e)

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tgh} x)$$

(f)

$$f(x) = \operatorname{argsinh} x$$

(g)

$$f(x) = \operatorname{argcosh} x$$

(h)

$$f(x) = |x|$$

(i)

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

(j)

$$f(x) = x[x]$$

(k)

$$f(x) = |\operatorname{arctg} x|$$

(l)

$$f(x) = \arccos \frac{1}{|x|}$$

(m)

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

(n)

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

(o)

$$f(x) = |\ln |x||$$

2. Ve kterých bodech je tečna ke grafu funkce $f(x) = 2 + x - x^2$ rovnoběžná
- s osou x ?
 - s přímkou $y = x$?
3. Nalezněte všechny body, ve kterých má graf funkce $f(x) = x + \sqrt[3]{\sin x}$ tečnu rovnoběžnou s osou y
4. Nalezněte rovnici tečny k elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ v bodě $(6; 6, 4)$
5. Pod jakým úhlem protíná graf funkce $f(x) = \ln x$ osu x ?
6. Pod jakým úhlem protíná graf funkce $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ přímkou $x = 2$?
7. Nalezněte derivace daných řádů, nederivujte mechanicky, ale myslete na definiční obory!
- f'' , je-li $f(x) = e^{-x^2}$
 - f'' , je-li $f(x) = x \ln x$
 - f'' , je-li $f(x) = \operatorname{tg} x$
 - $f^{(20)}$, je-li $f(x) = \sin x$
 - $f^{(20)}$, je-li $f(x) = a^x$, kde $a > 0$

8. Pomocí l'Hospitalova pravidla, pokud jsou splněny předpoklady, spočtěte

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, \text{ kde } a, b \in R, b \neq 0$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}, \text{ kde } a, b \in R, b \neq 0$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}, \text{ kde } \alpha > 0$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x, \text{ kde } \alpha > 0$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln^3 x)$$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} \right)$$

(j)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

(k)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$$

(l)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$$

(m)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

(n)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

(o)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$