

Limity funkcí a spojitost 30.11.- 4.12.

Limity funkcí

Je třeba znát limity polynomů a racionálních funkcí, funkcí s odmocninou, větu o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí, větu o limitě složené funkce, Heineho větu, větu o limitě sevřené funkce a je třeba vědět, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

a že cyklometrické funkce jsou spojitě na svých definičních oborech, tj. že platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \arcsin x = \arcsin a \quad \text{pro každé } a \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \arccos x = \arccos a \quad \text{pro každé } a \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a \quad \text{pro každé } a \in R$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot} a \quad \text{pro každé } a \in R$$

1. Spočítejte následující limity týkající se logaritmu a exponenciály

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3^x + 1)}{\ln(2^x + 1)}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(3^x + 1)}{\ln(2^x + 1)}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-5x}}{x}$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}, \quad a \in R$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 9}{x - 2}$$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 1)^{\frac{1}{x}}$$

(j)

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}$$

2. Spočtete následující limity týkající se hyperbolických funkcí

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sinh x - \sinh a}{x - a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cosh x - \cosh a}{x - a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

3. Spočtete následující limity týkající se cyklometrických funkcí

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

4. Spočtete následující limity pomocí Heineho věty

(a)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sin \left(\frac{x}{2^n} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1), \quad a > 0$$

5. Díky znalosti limit umíme efektivněji určovat infima a suprema množin. Určete $\inf M$ a $\sup M$ pro

$$M = \left\{ \frac{2x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \mid x \in (0, +\infty) \right\}$$

Spojitosť

Je třeba znát definici spojitosti v bodě a , speciálně vědět, že

- je-li a izolovaný bod D_f , pak f je spojitá v a (posloupnosti jsou spojitě funkce),
- je-li a hromadný bod D_f , pak f je spojitá v $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$,

a znát definici stejnoměrné spojitosti na intervalu

Z dřívějších cvičení víme, že následující funkce jsou spojitě v každém bodě svého definičního oboru

polynomy, e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$

Je třeba znát věty:

1. Jsou-li f a g funkce spojitě v a , pak následující funkce jsou také spojitě v a

$$f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g} \text{ (platí, pokud } g(a) \neq 0), |f|$$

2. Je-li g spojitá v a a f spojitá v $g(a)$, pak $f \circ g$ je spojitá v a

Pokud $a \in D'_f$ a $a \in R$, pak je třeba vědět, kdy říkáme, že f má v a odstranitelnou nespojitost, respektive kdy má f v bodě a skok

1. Zjistěte, kde jsou následující funkce spojitě a v jejich bodech nespojitosti určete, o jaký druh nespojitosti se jedná; kreslete si obrázky!

(a)

$$f(x) = x^\alpha, \text{ kde } \alpha \in R$$

(b)

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

(c)

$$f(x) = \operatorname{cotg} x$$

(d)

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

(e)

$$f(x) = [x]$$

(f)

$$f(x) = |x - 3|$$

(g)

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$$

(h)

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

(i)

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

(j)
$$f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

(k)
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(l)
$$f(x) = \operatorname{sgn} \sin x$$

(m)
$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$$

(n)
$$f(x) = \ln \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

(o)
$$f(x) = x - [x]$$

2. Zjistěte, zda jsou následující funkce stejnoměrně spojité na R

(a)
$$f(x) = 5x - 3$$

(b)
$$f(x) = x^2$$