

## Limity funkcí 23. a 27.11.2009

Je třeba znát limity polynomů a racionálních funkcí, funkcí s odmocninou, větu o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí, větu o limitě složené funkce, Heineho větu, větu o limitě sevřené funkce a je třeba vědět, že

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1\end{aligned}$$

1. Spočítejte následující limity týkající se goniometrických funkcí

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow a} (\sin x - \sin a)$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow a} (\cos x - \cos a)$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

(j)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

(k)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$$

2. Spočítejte následující limity týkající se logaritmu a exponenciály

(a)

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln x \quad \text{pro } a = 0^+, a = +\infty, a \in (0, +\infty)$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow a} e^x \quad \text{pro } a \in \overline{\mathbb{R}}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 1} \right)^{x^2}$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x^2)^{\frac{1}{x^2}}$$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x^2)^{\frac{1}{x}}$$

(j)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x^2}}$$

(k)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}, \quad a > 0$$

(l)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}, \quad b \neq 0$$

(m)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$$

(n)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$$

(o)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3^x + 1)}{\ln(2^x + 1)}$$

(p)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(3^x + 1)}{\ln(2^x + 1)}$$

(q)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$$

(r)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$$

(s)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$$

(t)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-5x}}{x}$$

(u)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}, \quad a \in R$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 9}{x - 2}$$

(w)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 1)^{\frac{1}{x}}$$

(x)

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}, \quad a > 0, b \in R$$