5. cvičení - Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Základní úlohy:

- nalézt vlastní čísla a vlastní vektory matice
- rozhodnout, zda je daná matice diagonalizovatelná (případně v závislosti na parametru)
- pokud je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná, nalézt matici $\mathbb{X}$ takovou,že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$
- ve speciálních jednoduchých případech rozhodnout, zda jsou dvě matice podobné

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A}$. Rozhodněte, zda $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.

   (a)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná.
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná a navíc má všechna vlastní čísla reálná.

   (a)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

4. Zjistěte, zda $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ jsou podobné a v kladném případě nalezněte $\mathbb{X}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{X}$.

5. Zjistěte, pro které hodnoty parametru β je diagonalizovatelná matice
$$\begin{pmatrix} -11 & -8 & 4 \\ 12+\beta & 9+\beta & -3 \\ 2\beta & 2\beta & 3 \end{pmatrix}$$