4. cvičení - Skalární součin a ortogonalita

Typy úloh, které je bezpodmínečně nutné umět řešit (uvažujeme výlučně eukleidovské a unitární prostory):

- doplnit ON soubor na ON bázi celého $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
- nalézt ON (OG) bázi $V \subset\subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
- nalézt ON (OG) bázi $V \subset\subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) obsahující nějaké předepsané vektory z $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) nebo vektory z nějaké podmnožiny $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
- nalézt OG doplněk $V \subset\subset \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ do $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
- nalézt OG doplněk V do Q, kde $V \subset\subset Q$ a $Q \subset\subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
- nalézt OG průmět

1. Doplňte soubor $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ na ON bázi $\mathbb{R}^4$ (dvěma způsoby).

2. Najděte ON bázi $V = [\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$.

3. Najděte OG bázi
$$V = [\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4, \quad \text{která obsahuje vektor z} \quad [\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\end{pmatrix}]_\lambda.$$

4. Najděte bázi $P^\perp \subset\subset \mathbb{R}^4$, je-li
   (a) $P = [\begin{pmatrix}3\\-5\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\7\end{pmatrix}]_\lambda$,
   (b) $P = [\begin{pmatrix}3\\1\\4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}]_\lambda$.

5. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Najděte bázi $Q^\perp$ do P, je-li
$$P = [\begin{pmatrix}1\\4\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-9\\1\\1\end{pmatrix}]_\lambda \quad \text{a} \quad Q = [\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\\3\end{pmatrix}]_\lambda.$$

6. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$. Najděte (třemi způsoby) $\vec{x}_P \in P$ a $\vec{x}_{P^\perp} \in P^\perp$ takové, že $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_P^\perp$, je-li
$$P = [\begin{pmatrix}2\\3\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}]_\lambda \quad \text{a} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-4\end{pmatrix}.$$