3. cvičení - Permutace a determinanty

Z teorie je třeba znát pojmy permutace, transpozice, inverze v permutaci, znaménko permutace, determinant matice. Dále je potřeba znát Sarrusovo pravidlo, determinant dolní a horní trojúhelníkové matice (a vědět, jak sloupcové, respektive řádkové úpravy, kterými matici převádíme na trojúhelníkovou, mění determinant), determinant součinu matic, determinant inverzní matice, rozvoj determinantu podle sloupce či řádku, výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované, Cramerovo pravidlo.

1. Určete znaménko následujících permutací.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$$

2. Dokažte přes počet inverzí, že transpozice je lichá permutace.

3. Určete složenou permutaci $\pi_1 \circ \pi_2$ a $\pi_2 \circ \pi_1$, je-li: $\pi_1 = (5\ 3\ 2\ 4\ 1)$ a $\pi_2 = (2\ 4\ 5\ 1\ 3)$.

4. Určete inverzní permutaci k $(4\ 1\ 5\ 2\ 3)$.

5. Zjistěte, které z následujících součinů (případně opatřené znaménkem mínus) jsou členy determinantu $\mathbb{A} = (a_{ij})$ příslušného řádu.
   (a) $a_{42}a_{64}a_{11}a_{53}a_{26}a_{35}$
   (b) $a_{72}a_{31}a_{25}a_{43}a_{52}a_{16}a_{64}$
   (c) $a_{23}a_{34}a_{17}a_{65}a_{72}a_{41}$
   (d) $a_{11}a_{2n}a_{3(n-1)} \dots a_{n2}$

6. Určete čísla i a k tak, aby součin $a_{53}a_{61}a_{16}a_{i2}a_{45}a_{k4}$ byl členem determinantu 6. řádu.

7. Spočtěte $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
   (a) Sarrusovým pravidlem,
   (b) převedením na horní trojúhelníkový tvar řádkovými (sloupcovými) úpravami,
   (c) rozvojem podle zvoleného řádku (sloupce).

8. Dvěma způsoby spočtěte $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

   Přesvědčte se, že Sarrusovo pravidlo v tomto případě použít nelze.

9. Spočtěte $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$.

10. Spočtěte $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & \dots & & \\ & & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x & 1 \end{vmatrix}$.

11. Spočtěte $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ & & & \dots & & \\ & & & \dots & & \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

12. Sloupcovými úpravami, respektive pomocí $\det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$, spočtěte

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ & & \dots & \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

13. Dokažte, že $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = n+1,$ kde n je řád matice.

14.
   - Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 6 \end{array}$$

   - Spočtěte pomocí vzorce $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{adj}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

   - Zkontrolujte, zda jste řešili soustavu správně, tj. zda pro nalezené řešení $\vec{x}$ platí $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1 Několik příkladů na determinanty k vyřešení samostatně

1. Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \dots & n & n & n \\ n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

2. Pro $n \geq 2$ spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Spočtěte determinant pomocí vztahu $\det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$ nebo pomocí sloupcových úprav

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

4. Dokažte, že

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{cases} (n+1)\alpha^n & \text{pro } \alpha = \beta, \\ \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \text{pro } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$