Lineární funkcionál 24.11.2009

Z teorie je nutné znát pojmy: lineární funkcionál, jádro, hodnost a defekt lineárního funkcionálu. Také využijeme 2. větu o dimenzi.

1. Nechť je definován funkcionál (tj. zobrazení vektorového prostoru do tělesa) $\varphi : C^3 \to C$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in C^3$ následujícím způsobem

   (a) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$,

   (b) $\varphi(\vec{x}) = 0$,

   (c) $\varphi(\vec{x}) = |x_1|$,

   (d) $\varphi(\vec{x}) = Re(x_1)$,

   (e) $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X}$ je báze prostoru C^3 definována následovně $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$,

   (f) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2\alpha_2 - x_2 + \alpha_3$ za stejných předpokladů jako v předchozím bodě.

   Zjistěte, zda $\varphi \in (C^3)^\#$. V kladném případě najděte hodnost $h(\varphi)$, defekt $d(\varphi)$ a bázi kerφ.

Téma písemečky na 1.12.2009

Lineární funkcionál - teoretická otázka.

Lineární zobrazení 1.12.2009

Z teorie je nutné znát pojmy: lineární zobrazení, jádro, hodnost a defekt lineárního zobrazení, matice zobrazení. Také využijeme 2. větu o dimenzi.

1. Nechť je definováno lineární zobrazení $A : C^3 \to C^2$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in C^3$ následujícím způsobem

   (a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ Im(x_2 - x_3) \end{pmatrix}$,

   (b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 - ix_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

   (c) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

   Zjistěte, zda $A \in \mathcal{L}(C^3, C^2)$. V kladném případě najděte hodnost $h(A)$, defekt $d(A)$ a bázi ker$A$.

2. Nechť $\mathcal{X}$ je báze prostoru C^3 a $\mathcal{Y}$ báze C^2 definovány následovně $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. V případech z předchozího cvičení, kdy $A \in \mathcal{L}(C^3, C^2)$, sestavte

(a) ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$,

(b) ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{Y}}$,

(c) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}$,

(d) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

3. Nechť $\mathcal{X}$ je báze prostoru C^3 a $\mathcal{Y}$ báze C definovány následovně $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$. Sestavte matici ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}}$ funcionálu φ z kapitoly Lineární funcionál příkladu 1.(a) v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

4. Nechť $A : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definované následovně $(A\vec{x})(t) = \vec{x}(t+1)$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{P}_3$ a každé $t \in C$. Ověřte, že $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$, kde $\mathcal{X} = (\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ je báze $\mathcal{P}_3$, v níž pro každé $t \in C$ platí
$$\vec{x}^{(1)}(t) = t - t^2,\ \vec{x}^{(2)}(t) = 1 - t + t^2,\ \vec{x}^{(3)}(t) = -1 + t.$$

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(C^3, \mathcal{P}_2)$ zadané obrazy bazických vektorů prostoru C^3 následovně
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}^{(1)},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}^{(2)},\ A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{x}^{(3)},$$
přičemž pro každé $t \in C$ platí
$$\vec{x}^{(1)}(t) = 2 + 3t,\ \vec{x}^{(2)}(t) = t,\ \vec{x}^{(3)}(t) = 1 + 4t.$$
Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$.

6. Nechť $A \in \mathcal{L}(R^2, R^3)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze R^3 a nechť ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze R^2.

7. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ je báze V_3. Sestavte ${}^{\mathcal{Y}}A$, $\mathcal{Y} = (2\vec{x}^{(1)} + 3\vec{x}^{(2)} + \vec{x}^{(3)}, 3\vec{x}^{(1)} + 4\vec{x}^{(2)} + \vec{x}^{(3)}, \vec{x}^{(1)} + 2\vec{x}^{(2)} + 2\vec{x}^{(3)})$.

8. Nechť $A \in \mathcal{L}(C^3, C^2)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Nalezněte $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

9. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze R^2, $A \in \mathcal{L}(R^2), B \in \mathcal{L}(R^2)$. Nechť ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a nechť pro každý vektor $\vec{x} \in R^2$ platí $B\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Nalezněte ${}^{\mathcal{E}_2}(A + 2B)^{\mathcal{X}}$.

10. Nechť $A \in \mathcal{L}(C^4, C^2)$, ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$.

   Úkoly:

   (a) Najděte bázi $A(C^4)$ a určete hodnost $h(A)$ a defekt $d(A)$.

   (b) Najděte bázi jádra.

   (c) Nalezněte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. Nechť $A \in \mathcal{L}(C^2, C^3)$, $B \in \mathcal{L}(C^3, C^4)$. Zobrazení A je definováno obrazy bazických vektorů $A\binom{2}{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\binom{1}{1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ a ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, báze $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ jsou tvaru

$$\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \text{ a } \mathcal{Z} = (\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}).$$

   Nalezněte ${}^{\mathcal{E}_2}(BA)^{\mathcal{Z}}$.

Téma písemečky na 8.12.2008

Lineární zobrazení - teoretická otázka.

Téma písemečky na 15.12.2008

Matice zobrazení - teoretická či praktická otázka.

Pro zajímavost

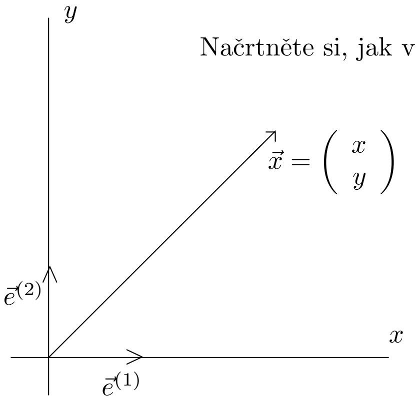
1. Proč žádné zobrazení $A : C^2 \to R^2$ není lineární?

2. Nechť $A : R^2 \to R^2$ je definované pro každé $\vec{x} \in R^2$ jako $A\vec{x} = (\vec{x})_{\mathcal{X}}$, kde $\mathcal{X} = (\vec{e}^{(1)} + \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(1)})$. Najděte $A(\{\binom{1}{1}, \binom{2}{2}\})$, $A([\binom{1}{1}]_\lambda)$, $A^{-1}(\{\binom{1}{1}, \binom{2}{2}\})$, $A^{-1}([\binom{1}{1}]_\lambda)$. Je A epimorfní, monomorfní?

3. Nechť $A : R^2 \to R^3$ je definované pro každé $\vec{x} \in R^2$ jako
$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}^{(1)\#}(\vec{x}) \\ \vec{x}^{(2)\#}(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{X}},$$
   kde $\mathcal{X} = (\vec{e}^{(1)} + \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(1)})$. Najděte $A(\{\binom{1}{1}, \binom{2}{2}\})$, $A([\binom{1}{1}]_\lambda)$, $A^{-1}(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\})$, $A^{-1}([\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda)$. Je A epimorfní, monomorfní?

4. Nechť $\mathbb{A}$ je reálná matice typu 2×2. Definujeme zobrazení $A : R^2 \to R^2$ předpisem $A\vec{x} := \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in R^2$. Ověřte, že $A \in \mathcal{L}(R^2)$. Zkontrolujte, že operátory A určené následujícími maticemi $\mathbb{A}$ působí tak, jak je uvedeno v závorkách.

   - $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (A je **zrcadlení** nebo **osová souměrnost** podle osy x.)



Načrtněte si, jak v jednotlivých případech vypadá vektor $A\vec{x}$!

- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (A je **zrcadlení** nebo **osová souměrnost** podle osy $x = y$.)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (A je **středová souměrnost**.)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (A je **rotace** o úhel θ po směru hodinových ručiček.)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (A je **prodloužení** respektive **zkrácení** ve směru x.)
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (A je **zkosení** ve směru x.)

Sami si rozmyslete, že každý regulární operátor z $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ je složením konečně mnoha zrcadlení (podle $x = y$), prodloužení či zkrácení ve směru x či y a zkosení ve směru x či y.

5. Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem. Nechť $A : P \to Q$ je izomorfismus. Ověřte a zapamatujte si:

   (a) $\dim P = \dim Q$

   (b) Je-li $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(n)})$ LN soubor, pak $(A\vec{x}^{(1)}, A\vec{x}^{(2)}, \ldots, A\vec{x}^{(n)})$ je LN. (Na toto tvrzení stačí A monomorfní.)

   (c) Je-li $P_1 \subset\subset P$ a $\dim P_1 = k$, pak $A(P_1) \subset\subset Q$ (na to stačí linearita A) a $\dim A(P_1) = k$.

   (d) Je-li $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(n)})$ báze P, pak $(A\vec{x}^{(1)}, A\vec{x}^{(2)}, \ldots, A\vec{x}^{(n)})$ je báze Q.

   (e) Analogická tvrzení platí i pro A^{-1}.

6. Proč funkcionál $\varphi : R^2 \to R$ definovaný pro každý vektor $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in R^2$ jako

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

   není prostý, ačkoliv $\ker\varphi = \{\vec{0}\}$?

7. Ukažte, že následující zobrazení R^3 do R^2 nejsou lineární. Pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in R^3$ definujeme

   (a) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

   (b) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1+3x_2 \\ x_3-2 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1^2 \\ x_2 + x_3^2 \end{smallmatrix} \right)$

(d) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 - \sqrt{|x_2|} \\ x_3 \end{smallmatrix} \right)$

(e) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix} \right)$

(f) $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ e^{x_3} \end{smallmatrix} \right)$

8. Uvažujme vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě – počátku) v rovině. Nechť je dána přímka p procházející počátkem. Rozmyslete si, že zobrazení, které každému vektoru přiřadí jeho kolmou projekci na přímku p, je lineární a že jeho jádrem je přímka q procházející počátkem a kolmá na p a jeho oborem hodnot je přímka p. Rozmyslete si analogickou úlohu v prostoru, tj. projekci vektorů na rovinu procházející počátkem.