Báze a dimenze, souřadnice vektoru v bázi 23.10. a 27.10.2009

Z teorie je třeba znát pojmy: báze, dimenze, souřadnice vektoru v bázi, standardní báze prostorů T^n, $T^{m,n}$ a $\mathcal{P}_n$.
Je třeba umět: vybrat bázi ze souboru generátorů, doplnit LN soubor na bázi.
Dobré je si také uvědomit, že pokud $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}$ leží ve vektorovém prostoru V nad T, pak je také $\left[\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}\right]_\lambda$ vektorovým prostorem nad T. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = C$.

1. Nechť $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ jsou vektory z C^4. Nalezněte nějakou bázi $\left[\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}, \vec{x}^{(4)}, \vec{x}^{(5)}\right]_\lambda$. Vyjádřete vektory $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}, \vec{x}^{(4)}, \vec{x}^{(5)}$ jako lineární kombinace nalezené báze.

2. V závislosti na parametru $\alpha \in C$ určete dimenzi následujícího lineárního obalu souboru vektorů z C^4:
$$\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

3. Nechť V je vektorový prostor nad T. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je bází V nad T. Nalezněte všechny hodnoty α, pro které je soubor $(\vec{x} + \alpha\vec{y} - \vec{z}, 2\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, \alpha\vec{x} + \vec{y})$ bází V.

4. Nechť $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou vektory z C^4. Nalezněte bázi $\left[\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right]_\lambda$, která obsahuje
   (a) vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$,
   (b) vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ je soubor vektorů z C^3, kde $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dokažte, že $\mathcal{X}$ je báze C^3 a nalezněte $(\vec{x})_\mathcal{X}$, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \vec{y}^{(3)})$ jsou dvě báze C^3, kde
$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte $(\vec{x})_{\mathcal{X}}$, je-li

$$(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7. Nechť V_3 je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ je báze V_3 a $\mathcal{Y} = (\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \vec{y}^{(3)})$ je soubor vektorů z V_3 a $\vec{x} \in V_3$. Dokažte, že $\mathcal{Y}$ je také báze V_3 a najděte $(\vec{x})_{\mathcal{Y}}$, je-li $(\vec{y}^{(1)})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}^{(2)})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}^{(3)})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \vec{y}^{(3)})$ jsou báze C^3 a $\vec{x}, \vec{y} \in C^3$, kde

   $$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, (\vec{y}^{(1)})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}^{(2)})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   $(\vec{y}^{(3)})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určete $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}}$ a $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}}$.

9. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \vec{y}^{(3)})$ jsou báze $\mathcal{P}_3$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{P}_3$, kde pro každé $t \in C$ platí

   $$\vec{x}^{(1)}(t) = 2 + 2t - t^2,\ \vec{x}^{(2)}(t) = 2 - t + 2t^2,\ \vec{x}^{(3)}(t) = -1 + 2t + 2t^2.$$

   Dále nechť $(\vec{y}^{(1)})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}^{(2)})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\vec{y}^{(3)})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určete $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}}$ a $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}}$.

Téma písemečky na příště

Teoretická otázka týkající se báze, dimenze, souřadnic vektoru v bázi.

Téma písemečky na přespříště

Praktická úloha týkající se báze, dimenze, souřadnic vektoru v bázi.

Pro zajímavost

1. Dokažte: Každý jednoprvkový soubor (α), kde $\alpha \neq 0$ je číslo z tělesa T, je bází vektorového prostoru T nad T. Žádné jiné báze neexistují.

2. Najděte několik bází vektorového prostoru C nad R.

3. Uvažujme vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě) v rovině. Rozmyslete si, že bází takového prostoru je každá dvojice šipek, které neleží v jedné přímce. Podobně, každá trojice šipek, které neleží v jedné rovině, je bází vektorového prostoru šipek (začínajících ve stejném bodě) v prostoru.

4. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných

   (a) na intervalu $(0, \pi)$,

(b) na množině $\{k\pi \mid k \in N\}$.

Najděte bázi $[f, g]_\lambda$, je-li $f(t) = \sin t,\ g(t) = \cos t$.

5. Nechť V je vektorový prostor nad R, kde $V = (0, +\infty)$. Pro každé $\alpha \in R$ a každé $x, y \in V$ definujeme $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$. Najděte bázi a dimenzi V.