2. cvičení - Inverzní matice a permutace

Inverzní matice

1. Dokažte, že následující matice je regulární, a nalezněte k ní inverzní.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Najděte $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$ a řešte soustavu $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$, aniž byste počítali $\mathbb{A}^{-1}$, poté najděte $\mathbb{A}^{-1}$ a své výsledky zkontrolujte. Matice jsou definovány následovně:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ jsou následující matice regulární. Pro takové matice pak najděte matice k nim inverzní.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{(e)} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(f)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(g)} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{(h)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

4. Z přednášky víte, že lze-li čtvercovou matici $\mathbb{A}$ ekvivalentními řádkovými úpravami $E_1, E_2, \ldots, E_k$ převést na $\mathbb{I}$, pak $\mathbb{I} = \mathbb{R}_k \cdot \cdots \cdot \mathbb{R}_2 \cdot \mathbb{R}_1 \cdot \mathbb{A}$, kde $\mathbb{R}_i$ vznikla z $\mathbb{I}$ ekvivalentní úpravou E_i. V příkladu 1. zkonstruujte matici $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí takového postupu, tj. $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{R}_k \cdot \cdots \cdot \mathbb{R}_2 \cdot \mathbb{R}_1$.

Permutace

Z teorie je třeba znát pojmy permutace, transpozice, inverze v permutaci, znaménko permutace.

1. Určete znaménko následujících permutací.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ 1 & 3 & \ldots & 2n-1 & 2 & 4 & \ldots & 2n \end{pmatrix}$$

2. Dokažte přes počet inverzí, že transpozice je lichá permutace.

3. Určete složenou permutaci $\pi_1 \circ \pi_2$ a $\pi_2 \circ \pi_1$, je-li: $\pi_1 = (5\ 3\ 2\ 4\ 1)$ a $\pi_2 = (2\ 4\ 5\ 1\ 3)$.

4. Určete inverzní permutaci k $(4\ 1\ 5\ 2\ 3)$.