Lineární (ne)závislost 13.10.2009

Z teorie je třeba znát pojmy: lineární kombinace (triviální, netriviální), lineární (ne)závislost, lineární obal. Je nutné umět rozhodnout, zda má soustava lineárních algebraických rovnic řešení, a pokud má, tak umět aspoň jedno najít. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = C$.

1. Rozhodněte, zda soubor vektorů $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ z R^3 je LZ nebo LN.

   (a) $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$,

   (b) $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

   (c) $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z V nad T. Zjistěte, zda soubor $(\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, 4\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}, 4\vec{x} + 13\vec{y} - 11\vec{z})$ je LZ nebo LN.

3. Nalezněte všechna $\alpha \in C$, pro která je soubor vektorů z C^3 $\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right)$ LZ.

4. Nechť $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ je soubor vektorů z C^3. Zjistěte, který z vektorů $\vec{x}$ a $\vec{z}$ leží v $\left[\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right]_\lambda$, je-li

   $$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix},\ \vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix},\ \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z V nad T. Zjistěte, který z vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ leží v $\left[\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right]_\lambda$, je-li

   $$\vec{x}^{(1)} = -5\vec{y},\ \vec{x}^{(2)} = \vec{x} + 2\vec{y} + 2\vec{z},\ \vec{x}^{(3)} = 2\vec{x} - \vec{y} + 8\vec{z},\ \vec{u} = \vec{x} + 7\vec{y} - 2\vec{z},\ \vec{v} = 2\vec{x} - \vec{z}.$$

6. Nechť $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ je soubor vektorů z R^3 a $\vec{x} \in R^3$. Nalezněte všechny hodnoty $\alpha \in R$, pro které $\vec{x} \in \left[\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right]_\lambda$, je-li

   (a) $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$,

   (b) $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$,

   (c) $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \alpha \end{pmatrix}$,

   (d) $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2\alpha + 1 \end{pmatrix}$.

7. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je LN soubor vektorů z V nad T. Označme $\mathcal{Y} = (\vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{z}, -\vec{x} + \alpha\vec{z}, \vec{x} + 2\alpha\vec{y} + 8\vec{z})$. Nalezněte všechna $\alpha \in T$ taková, že $\mathcal{Y}$ je LZ a vektor $\alpha\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}$ leží v lineárním obalu $\mathcal{Y}$.

8. Připomeňme nejprve, že $\mathcal{P}_3$ je vektorový prostor polynomů stupně nejvýše 2 s přidáním nulového polynomu. Nechť $\vec{x} \in \mathcal{P}_3$ a $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ je soubor vektorů z $\mathcal{P}_3$ tak, že pro každé $t \in C$ platí
$$\vec{x}^{(1)}(t) = 1 + t - 2t^2,\ \vec{x}^{(2)}(t) = 7 - 8t + 7t^2,\ \vec{x}^{(3)}(t) = 3 - 2t + t^2,\ \vec{x}(t) = 2 + 4t - t^2.$$
Zjistěte, zda $\vec{x} \in \left[\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right]_\lambda$.

9. Nechť $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)})$ je soubor vektorů z $\mathcal{P}_5$ takový, že pro každé $t \in C$ platí
$$\vec{x}^{(1)}(t) = 1 + 4t - 2t^2 + 3t^3 + t^4,\ \vec{x}^{(2)}(t) = 2 + 4t - 3t^2 - 2t^3 + 3t^4,\ \vec{x}^{(3)}(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + 11t^4.$$
Zjistěte, pro jaké parametry $\alpha, \beta, \gamma \in C$ je soubor LZ.

Téma písemečky na příště

Mějme vektorový prostor V nad T a soubor vektorů v něm. Rozhodněte, zda je soubor LZ či LN, případně zjistěte, zda patří nějaký vektor do lineárního obalu souboru.

Pro zajímavost

1. Je následující soubor vektorů LZ
$$\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2i \\ -1-i \end{pmatrix} \right)$$
   (a) v C^3 nad C?
   (b) v C^3 nad R?

2. Uvažujme vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě) v rovině. Co je lineárním obalem dvou vektorů, které leží v jedné přímce? Co je lineárním obalem dvou vektorů, které neleží v jedné přímce? Zamyslete se i nad lineárním obalem dvou a tří vektorů v prostoru.

3. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných na intervalu (a, b), kde $a, b \in R$, s operacemi definovanými bodově, tj. nechť $f, g \in V$ a nechť $\alpha \in R$, pak definujeme
$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \qquad \text{a} \qquad (\alpha \cdot f)(t) = \alpha \cdot f(t) \qquad \text{pro každé } t \in (a, b).$$
Uvažujme nekonečnou spočetnou množinu $M = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots\}$, kde $e_1(t) = 1, e_2(t) = t, e_3(t) = t^2, e_4(t) = t^3$ pro každé $t \in (a, b)$. Čemu je rovna množina tvořená lineárními kombinacemi všech souborů tvořených konečně mnoha prvky z M.

4. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných
   (a) na intervalu $(0, \pi)$,
   (b) na množině $\{k\pi \mid k \in N\}$.

   Ověřte, že (f, g) je LN soubor v případě (a) a LZ v případě (b), je-li $f(t) = \sin t,\ g(t) = \cos t$.

5. Nechť V je vektorový prostor nad R, kde $V = (0, +\infty)$. Pro každé $\alpha \in R$ a každé $x, y \in V$ definujeme $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$. Rozhodněte, zda je soubor (x, y) LZ, pokud
   (a) $x = 1,\ y = 3$,
   (b) $x = 2, y = 3$,
   (c) vektory x a y jsou zvoleny libovolně.