1. cvičení - Matice a lineární zobrazení a Soustavy lineárních rovnic

Matice a lineární zobrazení

Z teorie je třeba vědět:

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ a nechť $\vec{b} \in A(P)$, pak $A^{-1}\vec{b}$ (množina řešení $A\vec{x} = \vec{b}$) splňuje $A^{-1}\vec{b} = \vec{a} + kerA$, kde $\vec{a}$ je partikulární řešení, tedy $\vec{a}$ splňuje $A\vec{a} = \vec{b}$.
2. Matice zobrazení A v bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ splňuje $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$.
3. Jak se získá matice složeného zobrazení pomocí matic skládaných zobrazení.
4. Jak se řeší soustava lineárních algebraických rovnic (po vyslovení Frobeniovy věty budeme umět najít celou množinu řešení).

1. Nechť
   $$\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \text{ a } \mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix})$$
   jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ zadané svou maticí v bázi $\mathcal{X}$
   ${}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$,
   (a) je-li $(\vec{b})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$,
   (b) je-li $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$,
   (c) je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.
2. Nechť
   $$\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \text{ a } \mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix})$$
   jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$,
   ${}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$, je-li $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Je zadán lineární operátor A na $\mathbb{R}^3$ pomocí své matice v bázi $\mathcal{X}$ ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte
   (a) $kerA, d(A)$ a $h(A)$ (je A regulární operátor?),

(b) všechna řešení rovnice

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

(c) $A^{-1}(P)$, tedy vzor podprostoru P, je-li

$$P = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

4. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (-2\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3, -\vec{x}_1 + \vec{x}_3)$ jsou dvě báze vektorového prostoru V_3. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nalezněte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$.

   Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$, ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -5 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dále je zadáno lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ následující maticí ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Nalezněte všechna řešení rovnice $BA\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soustavy lineárních rovnic

Z teorie je třeba znát pojmy: soustava m lineárních rovnic o n neznámých, (rozšířená) matice soustavy, homogenní soustava, ekvivalentní úpravy, Frobeniova věta, hodnost matice, partikulární řešení

1. Nalezněte množinu všech řešení následující homogenní soustavy lineárních rovnic.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x & + & 14y & & & + & 11t & = & 0 \\ 13x & + & 36y & - & 10z & + & 19t & = & 0 \\ 3x & + & 25y & - & 19z & + & 2t & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & + & 5t & = & 0 \end{array}$$

2. Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic s nenulovou pravou stranou.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 7y & + & 3z & + & t & = & 6 \\ 3x & + & 5y & + & 2z & + & 2t & = & 4 \\ 9x & + & 4y & + & z & + & 7t & = & 2 \end{array}$$

3. Zjistěte, jakou podmínku musí splňovat parametry α, β, aby následující soustava lineárních rovnic měla netriviální řešení, a určete dimenzi vektorového prostoru všech řešení této soustavy.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ \alpha x & + & \beta y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

4. Nalezněte množinu všech řešení následujících soustav lineárních rovnic v závislosti na parametru λ.

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & + & 4u & = & 5 \\ 4x & - & 2y & + & 5z & + & 6u & = & 7 \\ 6x & - & 3y & + & 7z & - & \lambda u & = & 9 \\ \lambda x & - & 4y & + & 9z & + & 10u & = & 11 \end{array}$$

5. Nalezněte množinu všech řešení následujících soustav lineárních rovnic v závislosti na parametrech α, β.

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} (\alpha+1)x & + & (\beta+1)y & + & (\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta)z & = & \beta \\ (\beta+1)x & + & (\alpha+1)y & + & (\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta)z & = & -\alpha \\ x & + & y & + & (\alpha+\beta)z & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & & & + & \alpha z & = & 1 \\ \alpha^2 x & + & y & + & \alpha\beta z & = & -1 \\ \alpha\beta x & + & y & & & = & \beta \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & + & \alpha z & = & \beta \\ \beta x & + & 2y & - & z & = & \alpha \\ \alpha x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & 1 \end{array} \qquad (\beta \in \mathbb{R})$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcr} (\alpha^2+\alpha)x & + & (\alpha^2-\alpha)y & + & \alpha z & = & \alpha\beta \\ (\alpha+2\alpha\beta)x & + & (\alpha^2-2\alpha-1)y & + & \alpha z & = & \alpha\beta-\beta^2 \\ (\alpha^2-2\alpha\beta)x & + & (2\alpha+2\beta+1)y & & & = & \beta^2+\alpha\beta+2 \end{array} \qquad (\beta \in \mathbb{R})$$

6. Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametrech α, β, γ.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & y & - & 4z & = & \alpha+\beta \\ 4x & + & 6y & + & (\gamma-1)z & = & 9-\beta \\ 2x & + & 3y & + & (\gamma+4)z & = & 9-\alpha-\beta \end{array}$$

7. Nalezněte množinu všech řešení následující soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametrech $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$.

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & \alpha \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \beta \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \gamma \end{array}$$