Vektorový prostor 6.10.2009

Z teorie je třeba znát: definici tělesa a vektorového prostoru nad T (pro $T = C$ hovoříme o komplexním vektorovém prostoru, pro $T = R$ o reálném vektorovém prostoru), vlastnosti vektorového prostoru plynoucí bezprostředně z definice. Dále je třeba znát pojmy: vektor, složka vektoru, matice, polynom (předpokládá se také základní znalost teorie polynomů z úvodního kurzu).

1. Nechť V je množina uspořádaných dvojic reálných čísel (tedy $V = R \times R$), těleso $T = R$. Pro každé $\alpha \in R$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ definujeme

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

   Ukažte, že V s takto definovanými operacemi je vektorovým prostorem nad R. Značíme jej R^2.

2. Zobecnění příkladu 1.: pokud n je přirozené číslo, T je těleso, V je množina uspořádaných n-tic čísel z tělesa (budeme je zapisovat do sloupců), tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha_i \in T \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\} \right\},$$

   a operace jsou definovány po složkách,

   tj. pro každé $\alpha \in T$ a pro každé $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in V$ a každé $\vec{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in V$ definujeme

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \alpha\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \alpha\alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix},$$

   pak V je vektorovým prostorem nad T. Značíme jej T^n. Nejčastěji budeme pracovat s C^n nebo R^n.

3. Nechť T je těleso. Uvědomte si, že pak $T^1 = T$ tvoří vektorový prostor nad T. Speciálně C je komplexním vektorovým prostorem, R je reálným vektorovým prostorem, Q je vektorovým prostorem nad Q.

4. Nechť n je přirozené číslo, T je těleso. Rozmyslete si, že pokud $T' \subset T$ a T' je těleso, pak T^n tvoří vektorový prostor nad T'. Speciálně C^n je vektorovým prostorem nad R i nad Q, R^n je vektorovým prostorem nad Q. Pozor! Naopak to neplatí: R^n není vektorovým prostorem nad C, Q^n není vektorovým prostorem nad C ani nad R.

5. Nechť V je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, těleso $T = R$. Pro každé $\alpha \in R$ a každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ definujeme

(a)
$$\vec{x}+\vec{y}=\left(\begin{array}{c} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{array}\right) \text{ a } \alpha\vec{x}=\left(\begin{array}{c} \alpha x_1 \\ 0 \end{array}\right),$$

(b)
$$\vec{x}+\vec{y}=\left(\begin{array}{c} x_1+y_1 \\ 0 \end{array}\right) \text{ a } \alpha\vec{x}=\left(\begin{array}{c} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{array}\right).$$

Je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad R?

6. Nechť V je podmnožina C^3 složená z vektorů $\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right)$, pro které platí:

   (a) $x_1 \in R$,
   (b) $x_1 = 0$,
   (c) $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$,
   (d) $x_1 + x_2 = 0$,
   (e) $x_1 + x_2 = 1$,
   (f) $x_1 = x_2 \wedge x_1 \neq x_3$,
   (g) všechny složky jsou reálné,
   (h) $x_1 = x_2$,
   (i) $x_1 \neq x_2$,
   (j) $x_1 + 2x_3 = 0$,
   (k) $x_1 + 2x_3 = 1$.

   Která z těchto množin je při zachování operací v C^3 (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách) vektorovým prostorem nad C?

7. Nechť V je množina kladných reálných čísel, tj. $V = \{x > 0 \mid x \in R\}$, těleso $T = R$. Pro každé $\alpha \in R$ a každé $x, y \in V$ definujeme $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$. Je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad R?

8. Nechť T je těleso. Analogicky jako v příkladu 2. se ověří, že množina matic rozměru $m \times n$ s prvky z T s operacemi definovanými po složkách tvoří vektorový prostor nad T.

9. Nechť V je podmnožina $R^{2,2}$ tvořená

   (a) tzv. symetrickými maticemi, tj.
   $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22} \in R,\ a_{12} = a_{21} \right\},$$

   (b) tzv. diagonálními maticemi, tj.
   $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22} \in R \right\}.$$

   Zjistěte, zda V je vektorovým prostorem nad R.

10. Nechť $\mathcal{P}$ je množina polynomů s operacemi definovanými bodově, tj. pro každé $\alpha \in C$ a každý polynom $x \in \mathcal{P}$ a $y \in \mathcal{P}$ definujeme
    $$(x+y)(t) = x(t) + y(t) \qquad \text{a} \qquad (\alpha \cdot x)(t) = \alpha \cdot x(t) \qquad \text{pro každé } t \in C.$$
    Ověřte, že $\mathcal{P}$ tvoří vektorový prostor nad C.

11. Nechť $n \in N$. Ověřte, že také množina $\mathcal{P}_n$ tvořená polynomy stupně nejvýše $n-1$ a nulovým polynomem (jeho stupeň není definován) nad tělesem C tvoří vektorový prostor (operace definovány jako v předchozím příkladu).

Zapamatujte si

Nejdůležitější příklady vektorových prostorů: T^n nad tělesem T, $T^{m,n}$ nad tělesem T, vektorový prostor polynomů $\mathcal{P}$ nad tělesem C, vektorový prostor polynomů $\mathcal{P}_n$ stupně nejvýše $n-1$ s přidáním nulového polynomu nad tělesem C.

Téma písemečky na příště

Zadáme množinu V, těleso T, operace sčítání prvků z V a násobení prvku z V číslem z T. Úkol bude zjistit, zda V tvoří vektorový prostor nad T.

Pro zajímavost

1. Uvažujme množinu V reálných posloupností s operacemi definovanými po složkách, tj. nechť $a = (a_n)_{n\in N}$ a $b = (b_n)_{n\in N}$ jsou reálné posloupnosti a $\alpha \in R$, pak definujeme
$$a + b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{a} \qquad \alpha \cdot a = (\alpha \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Pak V je vektorovým prostorem nad R.
   (a) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nulami na prvních deseti místech tvoří vektorový prostor nad R.
   (b) Podmnožina tvořená posloupnostmi s prvním místem nenulovým, tj. posloupnostmi a s $a_1 \neq 0$, netvoří vektorový prostor nad R.
   (c) Podmnožina tvořená posloupnostmi s konečným počtem nenul tvoří vektorový prostor nad R.
   (d) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nekonečným počtem nul netvoří vektorový prostor nad R.
   (e) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nulovou limitou tvoří vektorový prostor nad R.
   (f) Podmnožina tvořená konvergentními posloupnostmi s nenulovou limitou netvoří vektorový prostor nad R.

2. Uvažujme množinu V reálných funkcí definovaných na intervalu (a, b), kde $a, b \in R$, s operacemi definovanými bodově, tj. nechť $f, g \in V$ a nechť $\alpha \in R$, pak definujeme
$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \qquad \text{a} \qquad (\alpha \cdot f)(t) = \alpha \cdot f(t) \qquad \text{pro každé } t \in (a, b).$$
Pak V je vektorovým prostorem nad R.
   (a) Podmnožina tvořená omezenými funkcemi tvoří vektorový prostor nad R.
   (b) Podmnožina tvořená funkcemi s tzv. konečným nosičem, tj.
$$\left\{ f : (a, b) \to R \;\middle|\; \text{existuje konečná } X \subset (a, b) \text{ taková, že } f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in (a, b) \setminus X \right\},$$
tvoří vektorový prostor nad R.
   (c) Podmnožina tvořená polynomy s reálnými koeficienty tvoří vektorový prostor nad R.