Nejprve doděláme příklady na souřadnice vektoru v bázi.

Podprostor 3.11.2009

Z teorie je nutné znát pojmy: podprostor, součet podprostorů $P+Q$, průnik podprostorů $P\cap Q$. A je důležité vědět, že $P+Q$ a $P\cap Q$ jsou vektorové prostory, a tudíž má smysl hledat jejich bázi a dimenzi. Také využijeme 1. větu o dimenzi.

1. Zjistěte, zda množina $M\subset C^3$ je podprostor C^3, a pokud je, určete bázi a dimenzi M. (Využijte faktu, že dimenze vlastního podprostoru je menší než dimenze prostoru samého.)

   (a) $M=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in C^3 \mid \alpha_j\in Z \quad \forall j\in\{1,2,3\}\}$,

   (b) $M=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in C^3 \mid \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0\}$,

   (c) $M=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in C^3 \mid \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0\wedge \alpha_1-\alpha_3=0\}$,

   (d) $M=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in C^3 \mid \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=1\}$.

2. Nechť $P\subset\subset R^3$, $Q\subset\subset R^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li $P=[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}]_\lambda$ a $Q=[\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}]_\lambda$.

3. Nechť $P\subset\subset R^4$, $Q\subset\subset R^4$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li

$$P=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in R^4 \mid \alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4=0\wedge 2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3-\alpha_4=0\},$$

$$Q=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in R^4 \mid -2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3+5\alpha_4=0\wedge 4\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3-5\alpha_4=0\}.$$

4. Nechť $P\subset\subset C^3$, $Q\subset\subset C^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li

$$P=\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in C^3 \mid 2\alpha_1+4\alpha_2-3\alpha_3=0\} \text{ a } Q=[\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}]_\lambda.$$

Téma písemečky na příště

Podprostor. Neprozradím tentokrát, zda půjde o teoretickou otázku nebo lehký příklad.

Zapamatujte si

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $M \subset V$.

1. $M \subset\subset V$ právě tehdy, když M je vektorovým prostorem nad T (operace definovány stejně jako ve V).

2. Jsou-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ vektory z V, pak $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$ je nejmenší podprostor V, který vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ obsahuje.

3. Pokud $P \subset\subset V$ a $Q \subset\subset V$, potom nejmenší podprostor V obsahující P i Q (tedy i jejich sjednocení) je $P + Q$. POZOR! $P \cup Q$ obecně podprostor V netvoří.

   Příklad: Nechť $V = R^2$, $P = [\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)]_\lambda$ a $Q = [\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)]_\lambda$, pak $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \notin P \cup Q$, a tedy $P \cup Q$ není podprostorem V.

Pro zajímavost

1. Uvažujte vektorový prostor šipek (začínajících ve stejném bodě) v rovině. Rozmyslete si, jaké vlastní podprostory tento prostor obsahuje. Stejnou úvahu proveďte i pro vektorový prostor šipek v prostoru.

2. Ukažte, že matice s prvky z T rozměru $m \times n$, které mají na předepsaných místech nuly, tvoří podprostor $T^{m,n}$.

3. Rozmyslete si, že vektorový prostor T nad T má jen triviální podprostor $\{0\}$ a nevlastní podprostor T.

4. Nechť V je podmnožina $R^{2,2}$ tvořená

   (a) tzv. symetrickými maticemi, tj.

   $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22} \in R,\ a_{12} = a_{21} \right\},$$

   (b) tzv. diagonálními maticemi, tj.

   $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11},\ a_{22} \in R \right\}.$$

   Zjistěte, zda $V \subset\subset R^{2,2}$.