Kvantová mechanika ve 40 minutách

Stručný průvodce konečněrozměrnou kvantovou mechanikou

Dalibor Karásek

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Úvod do kryptologie 6. 5. 2010

Program

Program

Stavy systému

Klasická mechanika

- Stavovým prostorem je konfigurační nebo fázový prostor.
- Stav systému je určen hodnotou všech poloh a rychlostí (hybností).

Stavy systému

Klasická mechanika

- Stavovým prostorem je konfigurační nebo fázový prostor.
- Stav systému je určen hodnotou všech poloh a rychlostí (hybností).

Kvantová mechanika

- Stavový prostorem je komplexní Hilbertův prostor $\mathscr{H}$.
- Stavu systému odpovídá **paprsek** tj. jednorozměrný podprostor v $\mathscr{H}$. Charakterizujeme ho jako třídu ekvivalence obyčejně jednotkovým vektorem.

Pozorovatelné (veličiny)

Klasická mechanika Pozorovatelné veličiny jsou reprezentovány funkcemi na stavovém prostoru.

Pozorovatelné (veličiny)

Klasická mechanika Pozorovatelné veličiny jsou reprezentovány funkcemi na stavovém prostoru.

Kvantová mechanika Každé pozorovatelné přísluší jeden samosdružený lineární operátor na $\mathscr{H}$.

Realizace měření

Mějme pozorovatelnou A a stav φ.

1. Naměřit lze pouze čísla $\lambda \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Realizace měření

Mějme pozorovatelnou A a stav φ.

1. Naměřit lze pouze čísla $\lambda \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.
2. Číslo λ naměříme s pravděpodobností $P(\varphi, \lambda) = (\varphi, E_\lambda \varphi) = ||E_\lambda \varphi||^2 \in < 0, 1 >$.

Realizace měření

Mějme pozorovatelnou A a stav φ.

1. Naměřit lze pouze čísla $\lambda \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.
2. Číslo λ naměříme s pravděpodobností $P(\varphi, \lambda) = (\varphi, E_\lambda \varphi) = ||E_\lambda \varphi||^2 \in < 0, 1 >$.
3. Stav φ po naměření přejde na stav

$$\psi = \frac{E_\lambda \varphi}{||E_\lambda \varphi||}.$$

Realizace měření

Mějme pozorovatelnou A a stav φ.

1. Naměřit lze pouze čísla $\lambda \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.
2. Číslo λ naměříme s pravděpodobností $P(\varphi, \lambda) = (\varphi, E_\lambda \varphi) = ||E_\lambda \varphi||^2 \in < 0, 1 >$.
3. Stav φ po naměření přejde na stav
$$\psi = \frac{E_\lambda \varphi}{||E_\lambda \varphi||}.$$
4. Střední hodnota
$$< A >_\varphi = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \cdot (\varphi, E_\lambda \varphi) = (\varphi, A\varphi).$$

Příklad 1

- Mějme stav $\varphi = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ a pozorovatelnou $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 1

- Mějme stav $\varphi = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ a pozorovatelnou $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
- Jaká je střední hodnota $< A >_\varphi$? Jaká je pravděpodobnost, že naměříme 0?

Příklad 1

- Mějme stav $\varphi = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ a pozorovatelnou $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
- Jaká je střední hodnota $< A >_\varphi$? Jaká je pravděpodobnost, že naměříme 0?
- Nápověda 1: Vlastní vektory jsou $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Příklad 1

- Mějme stav $\varphi = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ a pozorovatelnou $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
- Jaká je střední hodnota $< A >_\varphi$? Jaká je pravděpodobnost, že naměříme 0?
- Nápověda 1: Vlastní vektory jsou $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.
- Nápověda 2:

$$(\varphi, E_0\varphi) = (\varphi, (\varphi_0, \varphi)\varphi_0) = |(\varphi, \varphi_0)|^2.$$

Příklad 1

- Mějme stav $\varphi = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ a pozorovatelnou $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
- Jaká je střední hodnota $< A >_\varphi$? Jaká je pravděpodobnost, že naměříme 0?
- Nápověda 1: Vlastní vektory jsou $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.
- Nápověda 2:

$$(\varphi, E_0\varphi) = (\varphi, (\varphi_0, \varphi)\varphi_0) = |(\varphi, \varphi_0)|^2.$$

- Výsledek: $< A >_\varphi = 1$ a $P(\varphi, 1) = \frac{1}{2}$.

Kompatibilní pozorovatelné

- Mějme nyní pozorovatelné A_1 a A_2. Kdy neovlivní měření A_1 výsledek měření A_2?

Kompatibilní pozorovatelné

- Mějme nyní pozorovatelné A_1 a A_2. Kdy neovlivní měření A_1 výsledek měření A_2?
- Stav φ po naměření A_i přejde na stav

$$\psi = \frac{E_\lambda^{(A_i)}\varphi}{||E_\lambda^{(A_i)}\varphi||}.$$

Kompatibilní pozorovatelné

- Mějme nyní pozorovatelné A_1 a A_2. Kdy neovlivní měření A_1 výsledek měření A_2?
- Stav φ po naměření A_i přejde na stav

$$\psi = \frac{E_\lambda^{(A_i)}\varphi}{||E_\lambda^{(A_i)}\varphi||}.$$

- Musí být jedno, v jakém pořadí je měřím.

$$\Rightarrow [E_t^{(A_1)}, E_t^{(A_2)}] = 0 \Leftrightarrow [A_1, A_2] = 0.$$

Program

Definice

- Máme-li vektor, charakterizovaný vlastností k zapisujeme ho $|k\rangle$ a říkáme mu **ket**.
- Pomocí tohoto vektoru a skalárního součinu zkonstruujeme funkcionál (**bra**) $\langle k|$.
- Teď dává smysl **bra-ket**.

$$\langle k \, | \, l \rangle := (|k\rangle \, , |l\rangle).$$

Bra-ketová gymnastika

S bra-kety lze snadno pracovat, aniž člověk musí příliš přemýšlet, co dělá.

Projektor na $\{|\varphi\rangle\}_{lin}$:

$$E_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi| \,.$$

Relace úplnosti pro bázi $\{|n\rangle\}$:

$$\mathbb{1} = \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle\langle n| \,.$$

Stavový prostor více částic

- Mějme 2 částice, každá se stavovým prostorem $\mathscr{H}_i$.
- Stavový prostor systému dvou částic je $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$.
- Vektory jsou lineární kombinací objektů

$$|\varphi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 =: |\varphi\rangle_1 \, |\psi\rangle_2 = |\varphi, \psi\rangle$$

Program

Pauliho matice

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vlastnosti:

1. $\sigma_j = \sigma_j^\dagger$, $\det \sigma_j = -1$ a $\operatorname{Tr} \sigma_j = 0$.
2. Spolu s $\mathbb{1}$ tvoří bázi $\mathbb{C}^2$.
3. $$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \mathbb{1} + i \epsilon_{jkl} \sigma_l.$$
4. $$\left[\frac{1}{2}\sigma_j, \frac{1}{2}\sigma_k\right] = i\epsilon_{jkl}\frac{1}{2}\sigma_l$$

Měření spinu

- Mám-li elektron, a zajímá-li mě pouze jeho spin, je pro mě důležitý $\mathscr{H} = \mathbb{C}^2$.
- Měříme projekci spinu $\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ do jedné z os (nejčastěji osa $z = x_3$) pomocí operátorů S_i.

$$S_i = \frac{1}{2}\sigma_i.$$

- S_i nejsou kompatibilní pozorovatelné, protože

$$[S_j, S_k] = i\epsilon_{jkl}S_l.$$

Entanglement

- Mějme dvoučásticový stav $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle)$.

Entanglement

- Mějme dvoučásticový stav $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle)$.
- Změřme spin na první částici. A naměřme třeba $+\frac{1}{2}$. Jak se změní stav ψ?

$$\tilde{\psi} \simeq \left(E_{+\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{1}\right)\psi = \left(|1\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{1}\right)(|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle)$$
$$= \left(|1\rangle\langle 1||1\rangle\right)|0\rangle - \left(|1\rangle\langle 1||0\rangle\right)|1\rangle = |1\rangle\,|0\rangle\,.$$

Do tohoto stavu přejde systém **okamžitě**!

Entanglement

- Mějme dvoučásticový stav $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle)$.
- Změřme spin na první částici. A naměřme třeba $+\frac{1}{2}$. Jak se změní stav ψ?

$$\tilde{\psi} \simeq \left(E_{+\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{1}\right)\psi = \left(|1\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{1}\right)(|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle)$$
$$= \left(|1\rangle\langle 1||1\rangle\right)|0\rangle - \left(|1\rangle\langle 1||0\rangle\right)|1\rangle = |1\rangle\,|0\rangle\,.$$

Do tohoto stavu přejde systém **okamžitě**!

- Pokud se nyní pokusíme měřit spin na druhé částici, 100% naměříme spin $-\frac{1}{2}$.

No-clone teorém

- Ve kvantové mechanice nejde „naklonovat“ částici.

No-clone teorém

- Ve kvantové mechanice nejde „naklonovat“ částici.
- Neexistuje lineární operátor U s vlastností

$$\forall \left|a\right\rangle, \left|X\right\rangle \in \mathscr{H} \qquad U(\left|a\right\rangle \left|X\right\rangle) = \left|a\right\rangle \left|a\right\rangle .$$

No-clone teorém

- Ve kvantové mechanice nejde „naklonovat" částici.
- Neexistuje lineární operátor U s vlastností

$$\forall \left|a\right\rangle, \left|X\right\rangle \in \mathscr{H} \qquad U(\left|a\right\rangle \left|X\right\rangle) = \left|a\right\rangle \left|a\right\rangle .$$

- Selže to kvůli linearitě U.

Děkuji za pozornost.