Zápočtová písemka číslo 2 SKUPINA B

Praxe

1. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ spočtěte vzdálenost bodu $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ od přímky $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$.

   [3 body]

2. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory a rozhodněte o diagonalizovatelnosti matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

   [4 body]

3. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ zadané následovně:

   - W_1 normálovými rovnicemi: $W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$
   - W_2 parametrickými rovnicemi: $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & t & - & s \\ y & = & -1 & & & & \\ z & = & & & t & + & s \end{array}$

   Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte jejich vzájemnou polohu a průnik.

   [3 body]

Teorie

1. Definujte pozitivně definitní matici. Uveďte 2 kritéria pro rozhodování o pozitivní definitnosti matic. Rozhodněte, která z následujících matic je pozitivně definitní. Své tvrzení zdůvodněte.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   [3,5 bodu]

2. Popište alespoň 2 různé konkrétní skalární součiny v $\mathbb{C}^3$ (nápověda: standardní a $\mathbb{A}$-skalární s konkrétní maticí $\mathbb{A}$). Napište, jak vypadá součin vektorů $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a norma vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ při použití Vámi zvoleného $\mathbb{A}$-skalárního součinu.

   [3 body]

3. Definujte diagonalizovatelnou matici. Doplňte dvěma různými způsoby (pravdivými) následující tvrzení: Čtvercová matice $\mathbb{A}$ s komplexními prvky je diagonalizovatelná, právě když... (Použijete-li k vyslovení ekvivalentních výroků nějaké pojmy ze spektrální teorie matic, definujte je. Vlastní čísla a vlastní vektory definovat nemusíte.)

   [3,5 bodu]