Zápočtová písemka číslo 2 SKUPINA A

Praxe

1. Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je diagonalizovatelná matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix}$.

   [4 body]

2. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ zadané následovně:

   - W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & t & - & s \\ y & = & -1 & & & & \\ z & = & & & t & + & s \end{array}$

   Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte jejich vzájemnou polohu a průnik.

   [3 body]

3. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ spočtěte vzdálenost bodu $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ od podprostoru $[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$.

   [3 body]

Teorie

1. Definujte konvexní množinu a lineární varietu. Nakreslete příklad konvexní množiny v $\mathbb{R}^2$ a vyjmenujte všechny typy lineárních variet v $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, která z následujících implikací je správná. Své tvrzení zdůvodněte.

   (a) Každá konvexní množina je lineární varietou.

   (b) Každá lineární varieta je konvexní množinou.

   [3,5 bodu]

2. Definujte ortogonální matici. Uveďte příklad ortogonální matice různé od jednotkové. Co platí pro vlastní čísla ortogonální matice? Co platí pro její determinant? Uveďte ještě aspoň jedno tvrzení platné speciálně pro ortogonální matice.

   [3,5 bodu]

3. Definujte charakteristický polynom matice. Napište vztah determinantu matice a vlastních čísel matice. Co jste schopni říci o kořenech charakteristického polynomu

   (a) symetrické matice,

   (b) regulární matice,

   (c) pozitivně definitní matice?

   [3 body]