Zápočtová písemka číslo 1 SKUPINA B

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ nalezněte jádro lineárního zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definovaného pro každý $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ jako $A\vec{x} := \mathbb{A}\vec{x}$, kde
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor V:
$$V = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$
Najděte ortogonální průmět vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ do V, je-li
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Určete, pro které z následujících matic má soustava LAR $\mathbb{A}\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ jediné řešení v $\mathbb{R}^3$, je-li
$$\text{(a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
V takovém případě řešení najděte pomocí výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$. Třetí složku řešení vypočtěte také Cramerovým pravidlem (z výpočtu musí být zřejmé, jak jste postupoval(a)).

Teorie

1. Vyslovte větu známou pod jménem trojúhelníková nerovnost. Pro které z následujících dvojic vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ z eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^5$ se nabývá rovnosti v trojúhelníkové nerovnosti?
$$\text{(a) } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ a } \vec{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \\ -2 \\ 100 \end{pmatrix},$$
$$\text{(b) } \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \\ 18 \\ 27 \end{pmatrix} \text{ a } \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

2. Definujte inverzi v permutaci a znaménko permutace. Pojem ilustrujte pro permutaci $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Definujte singulární matici 3 různými ekvivalentními způsoby (pomocí hodnosti, pomocí determinantu, pomocí řešení homogenní soustavy LAR s touto maticí).