Zápočtová písemka číslo 1 SKUPINA A

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & 1 \\ \alpha x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \\ \alpha x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}.$$

   Má-li soustava pro nějaké α jediné řešení, nemusíte toto řešení počítat.

2. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor V:

$$V = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

   Najděte ortogonální bázi (pokud existuje) prostoru V obsahující vektor

$$\text{(a)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Určete, pro které z následujících matic existuje matice inverzní. V takovém případě najděte $\mathbb{A}^{-1}$ úplnou Gaussovou eliminací. Navíc pomocí adjungované matice vypočtěte $[\mathbb{A}^{-1}]_{13}$ a $[\mathbb{A}^{-1}]_{32}$ (z výpočtu musí být zřejmé, jak jste postupoval(a)).

$$\text{(a)} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorie

1. Definujte regulární matici 3 různými ekvivalentními způsoby (pomocí hodnosti, pomocí determinantu, pomocí řešení homogenní soustavy LAR s touto maticí).

2. Definujte úhel mezi dvěma nenulovými vektory v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Určete, zda vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ z $\mathbb{R}^3$ v příkladech (a), (b), (c) svírají tupý, pravý, přímý, nulový či ostrý úhel.

$$\text{(a)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Definujte hodnost matice.
   V následujících případech je $\mathbb{A}$ regulární a $\mathbb{B}$ singulární matice. Doplňte znaménka $=$, $>$, $<$

   (a) $h(\mathbb{A}) \qquad h(\mathbb{A}^T)$,
   (b) $h(\mathbb{A}) \qquad h(\mathbb{A}^{-1})$,
   (c) $h(\mathbb{A}) \qquad h(\mathbb{A}\mathbb{B})$,
   (d) $h(\mathbb{A}) \qquad h(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B})$.