Rozvoje v neceločíselných soustavách

Edita Pelantová

Dept. of Mathematics, FNSPE, Czech Technical University, Prague, Czech Republic

September 19, 2011

- Y. Bugeaud, *On a property of Pisot numbers and related questions* Acta Math. Hungar. (1996)
- P. Erdős, V. Komornik, *On developments in non-integer bases* Acta Math. Hungar. (1998)
- P. Erdős, M. Joó, V. Komornik, *On the sequence of numbers of the form* $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 q + \ldots + \varepsilon_n q^n, \varepsilon_i \in \{0,1\}$ Acta Arith. (1998)
- V. Komornik, P. Loreti, M. Pedicini *An approximation property of Pisot numbers* J. Numb. Theor. (2000)
- D.-J. Feng, Z.-Y. Wen, *A property of Pisot numbers* J. Numb. Theor. (2002)
- D. Garth, K. Hare, *Comments on the spectra of Pisot numbers* J. Numb. Theor. (2006)
- S. Akiyama, V. Komornik, *Discrete spectra and Pisot numbers* ArXiv (březen 2011)
- D.-J. Feng, *On the topology of polynomials with bounded integer coeffcients* ArXiv (září 2011)

Definition

Daný základ $\beta > 1$ a $m \in \mathbb{N}$. Označme

$$X^m(\beta) = \Big\{\varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta + \ldots + \varepsilon_n\beta^n \mid n \in \mathbb{N}, \varepsilon_i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}\Big\}$$

Poznámka: Erdős a spol. uvažovali $\beta \in (1, 2)$ a $m = 1$.
Hare a spol. množině $X^m(\beta)$ říká spectrum of β

Definition

Daný základ $\beta > 1$ a $m \in \mathbb{N}$. Označme

$$X^m(\beta) = \left\{ \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \beta + \ldots + \varepsilon_n \beta^n \mid n \in \mathbb{N}, \varepsilon_i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\} \right\}$$

Poznámka: Erdős a spol. uvažovali $\beta \in (1, 2)$ a $m = 1$.
Hare a spol. množině $X^m(\beta)$ říká spectrum of β

Ukázat obrázek pro $\beta = \tau$!!!!

Definition

Daný základ $\beta > 1$ a $m \in \mathbb{N}$. Označme

$$X^m(\beta) = \left\{ \varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta + \ldots + \varepsilon_n\beta^n \mid n \in \mathbb{N}, \varepsilon_i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\} \right\}$$

Poznámka: Erdős a spol. uvažovali $\beta \in (1, 2)$ a $m = 1$.
Hare a spol. množině $X^m(\beta)$ říká spectrum of β

Ukázat obrázek pro $\beta = \tau$!!!!

(x_n) posloupnost taková, že

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots \qquad \text{a} \qquad \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = X^m(\beta)$$

Definition

Daný základ $\beta > 1$ a $m \in \mathbb{N}$. Označme

$$X^m(\beta) = \Big\{\varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta + \ldots + \varepsilon_n\beta^n \mid n \in \mathbb{N}, \varepsilon_i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}\Big\}$$

Poznámka: Erdős a spol. uvažovali $\beta \in (1, 2)$ a $m = 1$.
Hare a spol. množině $X^m(\beta)$ říká spectrum of β

Ukázat obrázek pro $\beta = \tau$!!!!

(x_n) posloupnost taková, že

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots \qquad \text{a} \qquad \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = X^m(\beta)$$

Úkol: popsat vlastnosti množiny $X^m(\beta)$ a speciálně

$$L^m(\beta) := \limsup_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) \qquad \text{a} \qquad \ell^m(\beta) := \liminf_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)$$

Lemma (EK, 1998)

Nechť $\beta > 1$ *a* $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$.

- $m \geq \beta - 1$, *pak* $x_{k+1} - x_k \leq 1$,
- $m < \beta - 1$, *pak* $L^m(\beta) = \infty$.

Dk. na tabuli

Lemma (EK, 1998)

Nechť $\beta > 1$ *a* $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$.

- $m \geq \beta - 1, \quad \textit{pak} \quad x_{k+1} - x_k \leq 1,$
- $m < \beta - 1, \quad \textit{pak} \quad L^m(\beta) = \infty.$

Dk. na tabuli

Lemma

Nechť $\beta > 1$ *a* $m \in \mathbb{N}$.
Když $m \geq \beta - 1$ *a* β *není algebraické číslo, pak* $\ell^m(\beta) = 0$.

Dk. na tabuli

Theorem (EK, 1998)

Nechť $\ell^m(\beta) = 0$. *Pak pro každé* $0 < \delta < \Delta$ *existují indexy* $n < N$ *tak, že*

$$x_N - x_n > \Delta \qquad \text{a} \qquad x_{k+1} - x_k < \delta \ \ \textit{pro každé } k \textit{ mezi } n \textit{ a } N$$

Theorem (EK, 1998)

Nechť $\ell^m(\beta) = 0$*. Pak pro každé* $0 < \delta < \Delta$ *existují indexy* $n < N$ *tak, že*

$$x_N - x_n > \Delta \qquad \text{a} \qquad x_{k+1} - x_k < \delta \ \ \textit{pro každé } k \textit{ mezi } n \textit{ a } N$$

Theorem (B, 1996)

$\ell^m(\beta) \neq 0$ *pro každé* $m \in \mathbb{N}$ *tehdy a jen tehdy, když* β *je Pisot*

Přesné hodnoty $\ell^m(\beta)$

EJJ, 1992 pro $\beta^r = \beta^{r-1} + \ldots + \beta + 1$ a $m = 1$

$$\ell^m(\beta) = \frac{1}{\beta}$$

KLP, 2000 pro $\beta^3 = \beta^2 + 1$ a $m = 1$

$$\ell^m(\beta) = \beta^2 - 1$$

KLP, 2000 pro $\beta^2 = \beta + 1$ a $\beta^{n-2} < m \leq \beta^{n-1}$

$$\ell^m(\beta) = |F_n\beta - F_{n+1}|$$

Theorem (FW, 2002)

Nechť β *je Pisotovo číslo a* $m \geq \beta - 1$*. Pak množina* $\{x_{k+1} - x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ *je konečná a posloupnost mezer je substitutivní.*

Dk. na tabuli

Popis mezer a jejich hustot

FW, 2002	pro $\beta^3 - \beta^2 - 1 = 0$ a $1 \leq m \leq 10$
FW, 2002	pro $m = 1$ a báze β jedno z prvních 10-ti minimáních Pisotových čísel
GH, 2006	pro $\beta^d = a\beta^{d-1} + a\beta^{d-2} + \ldots + a\beta + b$, kde $b \leq a$ a $m = \lfloor \beta \rfloor$.
GH, 2006	pro $\beta^2 = a\beta - b$, kde $b + 2 \leq a$ a $m = \lfloor \beta \rfloor$