Pisotova a komplexní Pisotova čísla - pokračování

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze
Edita Pelantová

TIGR, 17. dubna 2012

Zopakování značení

$\lambda > 1$ - algebraické číslo

$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \ldots - a_1 x - a_0$ - minimální polynom

$$A = \begin{pmatrix} a_{d-1} & a_{d-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad - \quad \text{matice společnice}$$

$E_s :=$ $\mathbb{R}^d \cap$ lineární obal vlastních vektorů k vlastním číslům $|\mu| < 1$

$E_u :=$ $\mathbb{R}^d \cap$ lineární obal vlastních vektorů k vlastním číslům $|\mu| = 1$

$E_b :=$ $\mathbb{R}^d \cap$ lineární obal vlastních vektorů k vlastním číslům $|\mu| > 1$

$$\mathbb{R}^d = E_s \oplus E_u \oplus E_b.$$

Kwapiszova lemmata

Lemma 1.

Nechť $A \in \mathbb{Q}^{d\times d}$ má ireducibilní charakteristický polynom a nechť existují vektory $v_0 \in \mathbb{R}^d \setminus E_s$ a $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ takové, že $(A^n v_0)^\top k_0 \mapsto 0 \mod 1$. Pak vlastní čísla matice A jsou algebraická celá.

Lemma 2.

Nechť $A \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ má ireducibilní charakteristický polynom a nechť existují vektory $v_0 \in \mathbb{R}^d \setminus E_s$ a $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ takové, že $(A^n v_0)^\top k_0 \mapsto 0 \mod 1$. Pak $v_0 \in \mathbb{Q}^d + E_s$.

Matice s racionálními prvky

Lemma 0.

Nechť $A \in \mathbb{Q}^{d \times d}$. Pak matice A má NEtriviální invariantní podprostor $P \subset \mathbb{Q}^d$ právě tehdy, když charakteristický polynom matice A je reducibilní nad $\mathbb{Q}$.

Matice s racionálními prvky

Lemma 0.

Nechť $A \in \mathbb{Q}^{d\times d}$. Pak matice A má NEtriviální invariantní podprostor $P \subset \mathbb{Q}^d$ právě tehdy, když charakteristický polynom matice A je reducibilní nad $\mathbb{Q}$.

Důsledek

Nechť $A \in \mathbb{Q}^{d\times d}$ je ireducibiloní nad $\mathbb{Q}$. Pak pro každý $v \in \mathbb{Q}^d \setminus \{0\}$ soubor

$$v, Av, A^2v, \ldots, A^{d-1}v \quad \text{je LN nad} \quad \mathbb{Q}$$

Mřížky v $\mathbb{R}^d$

$v_1, v_2, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^d$ jsou LN

Mřížky v $\mathbb{R}^d$

$v_1, v_2, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^d$ jsou LN

$$L = \{z_1 v_1 + z_2 v_2 + \ldots + z_d v_d \ : \ z_k \in \mathbb{Z}\}$$

se nazývá **mřížka** (grid, lattice) generovaná $v_1, v_2, \ldots, v_d$.

Mřížky v $\mathbb{R}^d$

$v_1, v_2, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$ jsou LN

$$L = \{z_1 v_1 + z_2 v_2 + \dots + z_d v_d \ : \ z_k \in \mathbb{Z}\}$$

se nazývá **mřížka** (grid, lattice) generovaná $v_1, v_2, \dots, v_d$.

$$L^* = \{u \in \mathbb{R}^d \ : \ u^\top v \in \mathbb{Z} \ \text{pro každý} \ v \in L\}$$

se nazývá **duální mřížka** k L.

Mřížky v $\mathbb{R}^d$

$v_1, v_2, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^d$ jsou LN

$$L = \{z_1 v_1 + z_2 v_2 + \ldots + z_d v_d \ : \ z_k \in \mathbb{Z}\}$$

se nazývá **mřížka** (grid, lattice) generovaná $v_1, v_2, \ldots, v_d$.

$$L^* = \{u \in \mathbb{R}^d \ : \ u^\top v \in \mathbb{Z} \ \text{ pro každý } \ v \in L\}$$

se nazývá **duální mřížka** k L.

Příklad: $\mathbb{Z}^d$

Mřížky v $\mathbb{R}^d$

$v_1, v_2, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^d$ jsou LN

$$L = \{z_1 v_1 + z_2 v_2 + \ldots + z_d v_d \ : \ z_k \in \mathbb{Z}\}$$

se nazývá **mřížka** (grid, lattice) generovaná $v_1, v_2, \ldots, v_d$.

$$L^* = \{u \in \mathbb{R}^d \ : \ u^\top v \in \mathbb{Z} \text{ pro každý } v \in L\}$$

se nazývá **duální mřížka** k L.

Příklad: $\mathbb{Z}^d$ a její duální mřížka $(\mathbb{Z}^d)^* = \mathbb{Z}^d$

Mřížky v $\mathbb{R}^d$

$v_1, v_2, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^d$ jsou LN

$$L = \{z_1 v_1 + z_2 v_2 + \ldots + z_d v_d \;:\; z_k \in \mathbb{Z}\}$$

se nazývá **mřížka** (grid, lattice) generovaná $v_1, v_2, \ldots, v_d$.

$$L^* = \{u \in \mathbb{R}^d \;:\; u^\top v \in \mathbb{Z} \text{ pro každý } v \in L\}$$

se nazývá **duální mřížka** k L.

Příklad: $\mathbb{Z}^d$ a její duální mřížka $(\mathbb{Z}^d)^* = \mathbb{Z}^d$

$$L^* = \{u \in \mathbb{R}^d \;:\; u^\top v = 0 \mod 1 \text{ pro každý } v \in L\}$$

Mřížky v $\mathbb{R}^d$

Nebojme se mřížek!!!

Mřížky v $\mathbb{R}^d$

Nebojme se mřížek!!!

L generovaný $v_1, v_2, \dots, v_d$

Označme B matici $(v_1 | v_2 | \dots | v_d)$.

Mřížky v $\mathbb{R}^d$

Nebojme se mřížek!!!

L generovaný $v_1, v_2, \ldots, v_d$

Označme B matici $(v_1|v_2|\ldots|v_d)$. Pak

$$L = B\mathbb{Z}^d \quad \text{a} \quad L^* = (B^{-1})^\top \mathbb{Z}^d$$

Mřížky v $\mathbb{R}^d$

Nebojme se mřížek!!!

L generovaný $v_1, v_2, \ldots, v_d$

Označme B matici $(v_1|v_2|\ldots|v_d)$. Pak

$$L = B\mathbb{Z}^d \quad \text{a} \quad L^* = (B^{-1})^\top \mathbb{Z}^d$$

Využijeme mřížku

Mřížky v $\mathbb{R}^d$

Nebojme se mřížek!!!

L generovaný $v_1, v_2, \ldots, v_d$

Označme B matici $(v_1|v_2|\ldots|v_d)$. Pak

$$L = B\mathbb{Z}^d \quad \text{a} \quad L^* = (B^{-1})^\top \mathbb{Z}^d$$

Využijeme mřížku

$A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ a L mřížka v $\mathbb{R}^d$

$$AL \subset L \qquad \Longrightarrow \qquad A \sim C \in \mathbb{Z}^{d\times d}$$

speciálně, vlastní čísla matice A jsou algebraická celá.

Důkaz Kwapiszových lemmat

Předpoklad: existuje $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ a $v_0 \in \mathbb{R}^d$ tak, že $(A^n v_0)^\top \to 0$ mod 1.

Důkaz Kwapiszových lemmat

Předpoklad: existuje $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ a $v_0 \in \mathbb{R}^d$ tak, že $(A^n v_0)^\top \to 0$ mod 1.
Položme

$$K := \{k \in \mathbb{Q}^d \ : \ (A^n v_0)^\top k \to 0 \mod 1\}$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Předpoklad: existuje $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ a $v_0 \in \mathbb{R}^d$ tak, že $(A^n v_0)^\top \to 0 \mod 1$.

Položme

$$K := \{k \in \mathbb{Q}^d \ : \ (A^n v_0)^\top k \to 0 \mod 1\}$$

- K je uzavřeno na $+$ a $-$
- $A^\top K \subset K$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Předpoklad: existuje $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ a $v_0 \in \mathbb{R}^d$ tak, že $(A^n v_0)^\top \to 0$ mod 1.
Položme

$$K := \{k \in \mathbb{Q}^d \ : \ (A^n v_0)^\top k \to 0 \mod 1\}$$

- K je uzavřeno na $+$ a $-$
- $A^\top K \subset K$

Položme k_0, $k_1 = A^\top k_0, \ldots, \ k_{d-1} = (A^\top)^{d-1} k_0$ a

$$\Gamma := \text{mřížka generovaná vektory } k_0, k_1, \ldots, k_{d-1}$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Předpoklad: existuje $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ a $v_0 \in \mathbb{R}^d$ tak, že $(A^n v_0)^\top \to 0$ mod 1.
Položme

$$K := \{k \in \mathbb{Q}^d \ : \ (A^n v_0)^\top k \to 0 \mod 1\}$$

- K je uzavřeno na $+$ a $-$
- $A^\top K \subset K$

Položme $k_0, \ \ k_1 = A^\top k_0, \ \ldots, \ \ k_{d-1} = (A^\top)^{d-1} k_0$ a

$$\Gamma := \text{mřížka generovaná vektory } k_0, k_1, \ldots, k_{d-1}$$

Víme: $(A^n v_0)^\top k_i \to 0 \mod 1$ pro každé k_i

Důkaz Kwapiszových lemmat

Předpoklad: existuje $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ a $v_0 \in \mathbb{R}^d$ tak, že $(A^n v_0)^\top \to 0$ mod 1.
Položme

$$K := \{k \in \mathbb{Q}^d \ : \ (A^n v_0)^\top k \to 0 \mod 1\}$$

- K je uzavřeno na $+$ a $-$
- $A^\top K \subset K$

Položme $k_0, \ \ k_1 = A^\top k_0, \ \ldots, \ \ k_{d-1} = (A^\top)^{d-1} k_0$ a

$$\Gamma := \text{mřížka generovaná vektory } k_0, k_1, \ldots, k_{d-1}$$

Víme: $(A^n v_0)^\top k_i \to 0$ mod 1 pro každé k_i

$$\operatorname{dist}(A^n v_0, \Gamma^*) \to 0$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Existuje $a \in \mathbb{N}$ tak, že

$$A^\top \Gamma \subset \frac{1}{a}\,\Gamma\,,$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Existuje $a \in \mathbb{N}$ tak, že

$$A^\top \Gamma \subset \frac{1}{a}\,\Gamma\,, \qquad \text{a tedy} \quad A\Gamma^* \subset \frac{1}{a}\,\Gamma^*\,,$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Existuje $a \in \mathbb{N}$ tak, že

$$A^\top \Gamma \subset \frac{1}{a}\,\Gamma\,, \qquad \text{a tedy} \quad A\Gamma^* \subset \frac{1}{a}\,\Gamma^*\,, \qquad \text{a tedy} \qquad A\Gamma^* \cup \Gamma^* \subset \frac{1}{a}\,\Gamma^*\,.$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Existuje $a \in \mathbb{N}$ tak, že

$$A^{\top}\Gamma \subset \frac{1}{a}\,\Gamma\,, \qquad \text{a tedy} \quad A\Gamma^* \subset \frac{1}{a}\,\Gamma^*\,, \qquad \text{a tedy} \qquad A\Gamma^* \cup \Gamma^* \subset \frac{1}{a}\,\Gamma^*\,.$$

Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $x, y \in A\Gamma^* \cup \Gamma^*$ platí

$$\operatorname{dist}(x, y) < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

$$\mathrm{dist}\left(A^n v_0, \Gamma^*\right) \to 0$$

Odtud: pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $u_n \in \Gamma^*$ tak, že

$$\mathrm{dist}\left(A^n v_0, \Gamma^*\right) = \mathrm{dist}\left(A^n v_0, u_n\right) = ||A^n v_0 - u_n|| \to 0$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

$$\text{dist}\left(A^n v_0, \Gamma^*\right) \to 0$$

Odtud: pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $u_n \in \Gamma^*$ tak, že

$$\text{dist}\left(A^n v_0, \Gamma^*\right) = \text{dist}\left(A^n v_0, u_n\right) = ||A^n v_0 - u_n|| \to 0$$

Odhadněme

$$\text{dist}\,(\underbrace{Au_n}_{\in A\Gamma^*}, \underbrace{u_{n+1}}_{\in \Gamma^*}) \leq \text{dist}\left(A^{n+1} v_0, u_{n+1}\right) + \text{dist}\left(Au_n, A^{n+1} v_0\right)$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

$$\text{dist}\,(A^n v_0, \Gamma^*) \to 0$$

Odtud: pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $u_n \in \Gamma^*$ tak, že

$$\text{dist}\,(A^n v_0, \Gamma^*) = \text{dist}\,(A^n v_0, u_n) = ||A^n v_0 - u_n|| \to 0$$

Odhadněme

$$\text{dist}\,(\underbrace{Au_n}_{\in A\Gamma^*}, \underbrace{u_{n+1}}_{\in\Gamma^*}) \;\leq\; \text{dist}\,(A^{n+1}v_0, u_{n+1}) + \text{dist}\,(Au_n, A^{n+1}v_0)$$

existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$Au_n = u_{n+1} \qquad \text{pro každé} \qquad n \geq n_0$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

$$Au_n = u_{n+1} \qquad \text{pro každé} \qquad n \geq n_0$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

$$Au_n = u_{n+1} \qquad \text{pro každé} \qquad n \geq n_0$$

Položme

$$L := \{z \in \Gamma^* \ : \ A^\ell z \in \Gamma^* \ \ \text{pro každé} \ \ \ell \geq 0\}$$

- $u_{n_0} \in L$ a všechny obrazy $A^\ell u_{n_0}$ taky
- L je uzavřeno na $\pm$
- $AL \subset L$

Důkaz Kwapiszových lemmat

$$Au_n = u_{n+1} \qquad \text{pro každé} \qquad n \geq n_0$$

Položme

$$L := \{z \in \Gamma^* \ : \ A^\ell z \in \Gamma^* \ \text{ pro každé } \ \ell \geq 0\}$$

- $u_{n_0} \in L$ a všechny obrazy $A^\ell u_{n_0}$ taky
- L je uzavřeno na $\pm$
- $AL \subset L$

Podle A je podobná celočíselné matici,

Důkaz Kwapiszových lemmat

$$Au_n = u_{n+1} \qquad \text{pro každé} \qquad n \geq n_0$$

Položme

$$L := \{z \in \Gamma^* \ : \ A^\ell z \in \Gamma^* \ \text{ pro každé } \ \ell \geq 0\}$$

- $u_{n_0} \in L$ a všechny obrazy $A^\ell u_{n_0}$ taky
- L je uzavřeno na $\pm$
- $AL \subset L$

Podle A je podobná celočíselné matici, λ je algebraické celé.

Dokázno Lemma 1.

Důkaz Kwapiszových lemmat

Víme

$$\operatorname{dist}(A^n v_0, \Gamma^*) = \operatorname{dist}(A^n v_0, u_n) = ||A^n v_0 - u_n|| \to 0$$

Existují posloupnosti (x_n), (y_n) a (z_n) tak, že

$$A^n v_0 - u_n$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Víme

$$\operatorname{dist}(A^n v_0, \Gamma^*) = \operatorname{dist}(A^n v_0, u_n) = ||A^n v_0 - u_n|| \to 0$$

Existují posloupnosti (x_n), (y_n) a (z_n) tak, že

$$A^n v_0 - u_n = \underbrace{x_n}_{\in E_s} + \underbrace{y_n}_{\in E_u} + \underbrace{z_n}_{\in E_b}$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Víme

$$\operatorname{dist}(A^n v_0, \Gamma^*) = \operatorname{dist}(A^n v_0, u_n) = ||A^n v_0 - u_n|| \to 0$$

Existují posloupnosti (x_n), (y_n) a (z_n) tak, že

$$A^n v_0 - u_n = \underbrace{x_n}_{\in E_s} + \underbrace{y_n}_{\in E_u} + \underbrace{z_n}_{\in E_b}$$

a taky $\quad ||x_n|| \to 0\,, \qquad ||y_n|| \to 0\,, \quad ||z_n|| \to 0\,.$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Víme

$$\operatorname{dist}(A^n v_0, \Gamma^*) = \operatorname{dist}(A^n v_0, u_n) = ||A^n v_0 - u_n|| \to 0$$

Existují posloupnosti (x_n), (y_n) a (z_n) tak, že

$$A^n v_0 - u_n = \underbrace{x_n}_{\in E_s} + \underbrace{y_n}_{\in E_u} + \underbrace{z_n}_{\in E_b}$$

a taky $\quad ||x_n|| \to 0\,, \qquad ||y_n|| \to 0\,, \quad ||z_n|| \to 0\,.$

Máme

$$A^{n+1} v_0 - u_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1}$$

$$A^{n+1} v_0 - A u_n = A x_n + A y_n + A z_n$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Víme

$$\operatorname{dist}(A^n v_0, \Gamma^*) = \operatorname{dist}(A^n v_0, u_n) = ||A^n v_0 - u_n|| \to 0$$

Existují posloupnosti (x_n), (y_n) a (z_n) tak, že

$$A^n v_0 - u_n = \underbrace{x_n}_{\in E_s} + \underbrace{y_n}_{\in E_u} + \underbrace{z_n}_{\in E_b}$$

a taky $\quad ||x_n|| \to 0\,, \qquad ||y_n|| \to 0\,, \quad ||z_n|| \to 0\,.$

Máme

$$A^{n+1} v_0 - u_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1}$$

$$A^{n+1} v_0 - A u_n = A x_n + A y_n + A z_n$$

Protože $Au_n = u_{n+1}$ pro každé $n \geq n_0$, dostaneme

$$x_{n+1} = Ax_n \quad y_{n+1} = Ay_n \quad z_{n+1} = Az_n$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Pro každé $n \geq n_0$

$$x_{n+1} = Ax_n \quad y_{n+1} = Ay_n \quad z_{n+1} = Az_n$$

Protože

$$||A^n y_{n_0}|| \to 0 \quad \text{a} \quad ||A^n z_{n_0}|| \to 0$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Pro každé $n \geq n_0$

$$x_{n+1} = Ax_n \quad y_{n+1} = Ay_n \quad z_{n+1} = Az_n$$

Protože

$$||A^n y_{n_0}|| \to 0 \quad \text{a} \quad ||A^n z_{n_0}|| \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y_{n_0} = z_{n_0} = 0$$

Důkaz Kwapiszových lemmat

Pro každé $n \geq n_0$

$$x_{n+1} = Ax_n \quad y_{n+1} = Ay_n \quad z_{n+1} = Az_n$$

Protože

$$||A^n y_{n_0}|| \to 0 \quad \text{a} \quad ||A^n z_{n_0}|| \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y_{n_0} = z_{n_0} = 0$$

a tedy

$$A^{n_0} v_0 = \underbrace{u_{n_0}}_{\in \Gamma^* \subset \mathbb{Q}^d} + \underbrace{x_{n_0}}_{\in E_s}$$

Aplikací $(A^{-1})^{n_0}$ dostaneme

$$v_0 \in \mathbb{Q}^d + E_s$$

Dokázno Lemma 2.