Pisotova a komplexní Pisotova čísla

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze
Edita Pelantová

TIGR, 10. dubna 2012

Algebraická čísla

- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, které je kořenem nějakého polynomu tvaru
$$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \ldots - a_1 x - a_0 \qquad (*)$$
s koeficienty $a_k \in \mathbb{Q}$ je **algebraické číslo**.
- Polynom minimálního stupně ve tvaru $(*)$, který má λ za kořen, se nazývá **minimální polynom** čísla λ,
jeho stupeň se nazývá **stupeň čísla** λ,
ostatní kořeny minimálního polynomu jsou čísla **sdružená** k číslu λ.
- Pokud všechny $a_k \in \mathbb{Z}$, pak λ se nazývá **algebraické celé číslo**

Algebraická čísla

- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, které je kořenem nějakého polynomu tvaru
$$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \ldots - a_1 x - a_0 \qquad (*)$$
s koeficienty $a_k \in \mathbb{Q}$ je **algebraické číslo**.
- Polynom minimálního stupně ve tvaru $(*)$, který má λ za kořen, se nazývá **minimální polynom** čísla λ,
jeho stupeň se nazývá **stupeň čísla** λ,
ostatní kořeny minimálního polynomu jsou čísla **sdružená** k číslu λ.
- Pokud všechny $a_k \in \mathbb{Z}$, pak λ se nazývá **algebraické celé číslo**

Příklad: $\lambda = i - 1$

Algebraická čísla

- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, které je kořenem nějakého polynomu tvaru
$$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \ldots - a_1 x - a_0 \qquad (*)$$
s koeficienty $a_k \in \mathbb{Q}$ je **algebraické číslo**.
- Polynom minimálního stupně ve tvaru $(*)$, který má λ za kořen, se nazývá **minimální polynom** čísla λ,
jeho stupeň se nazývá **stupeň čísla** λ,
ostatní kořeny minimálního polynomu jsou čísla **sdružená** k číslu λ.
- Pokud všechny $a_k \in \mathbb{Z}$, pak λ se nazývá **algebraické celé číslo**

Příklad: $\lambda = i - 1$
je kořen polynomu $x^4 + 4$,

Algebraická čísla

- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, které je kořenem nějakého polynomu tvaru
$$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \ldots - a_1 x - a_0 \qquad (*)$$
s koeficienty $a_k \in \mathbb{Q}$ je **algebraické číslo**.
- Polynom minimálního stupně ve tvaru $(*)$, který má λ za kořen, se nazývá **minimální polynom** čísla λ,
jeho stupeň se nazývá **stupeň čísla** λ,
ostatní kořeny minimálního polynomu jsou čísla **sdružená** k číslu λ.
- Pokud všechny $a_k \in \mathbb{Z}$, pak λ se nazývá **algebraické celé číslo**

Příklad: $\lambda = i - 1$
je kořen polynomu $x^4 + 4$,
jeho minimální polynom je $x^2 + 2x + 2$,

Algebraická čísla

- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, které je kořenem nějakého polynomu tvaru
$$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \ldots - a_1 x - a_0 \qquad (*)$$
s koeficienty $a_k \in \mathbb{Q}$ je **algebraické číslo**.
- Polynom minimálního stupně ve tvaru $(*)$, který má λ za kořen, se nazývá **minimální polynom** čísla λ,
jeho stupeň se nazývá **stupeň čísla** λ,
ostatní kořeny minimálního polynomu jsou čísla **sdružená** k číslu λ.
- Pokud všechny $a_k \in \mathbb{Z}$, pak λ se nazývá **algebraické celé číslo**

Příklad: $\lambda = i - 1$
je kořen polynomu $x^4 + 4$,
jeho minimální polynom je $x^2 + 2x + 2$,
jeho sružený kořen je $-i - 1$.

Pisotova čísla

Věta 1. (Pisot 1938, Vijayaraghavan 1941)

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$ je algebraické číslo. Pak následující dvě vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. λ je algebraické celé číslo a všechna jemu sdružená čísla jsou v absolutní hodnotně menší než 1;
2. Existuje $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} x\lambda^n \;=\; 0 \;\mod 1$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \min\{|x\lambda^n - k| \;:\; k \in \mathbb{Z}\} = 0$$

Pisotova čísla

Věta 1. (Pisot 1938, Vijayaraghavan 1941)

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$ je algebraické číslo. Pak následující dvě vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. λ je algebraické celé číslo a všechna jemu sdružená čísla jsou v absolutní hodnotně menší než 1;
2. Existuje $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x\lambda^n \; = \; 0 \mod 1$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \min\{|x\lambda^n - k| \, : \, k \in \mathbb{Z}\} = 0$$

Otázka: Lze vynechat předpoklad "λ je algebraické číslo" ?

Příklad Pisotova čísla

$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618$
kořen rovnice $x^2 - x - 1$, sdružené číslo $\tau' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \doteq -0.618$

Příklad Pisotova čísla

$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618$
kořen rovnice $x^2 - x - 1$, sdružené číslo $\tau' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \doteq -0.618$

Fibonacciova čísla zadaná rekurencí

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad \text{a} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Příklad Pisotova čísla

$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618$
kořen rovnice $x^2 - x - 1$, sdružené číslo $\tau' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \doteq -0.618$

Fibonacciova čísla zadaná rekurencí

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad \text{a} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\tau^n - (\tau')^n\Big)$$

Příklad Pisotova čísla

$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618$
kořen rovnice $x^2 - x - 1$, sdružené číslo $\tau' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \doteq -0.618$

Fibonacciova čísla zadaná rekurencí

$$F_0 = 0, \ F_1 = 1 \quad \text{a} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\tau^n - (\tau')^n\Big)$$

Tedy pro $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ máme

$$x\tau^n \to 0 \mod 1$$

Příklad Pisotova čísla

$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618$
kořen rovnice $x^2 - x - 1$, sdružené číslo $\tau' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \doteq -0.618$

Fibonacciova čísla zadaná rekurencí

$$F_0 = 0, \; F_1 = 1 \quad \text{a} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(\tau^n - (\tau')^n \Big)$$

Tedy pro $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ máme

$$x\tau^n \to 0 \mod 1$$

Co $x = 1$?

Věta 2. (Pisot 1938, Vijayaraghavan 1941)

Nechť λ je Pisotovo číslo s minimálním polynomem $p(x)$ stupně d. Označme $X_\lambda = \{x \ : \ x\lambda^n \to 0 \mod 1\}$. Pak $x \in X_\lambda$ právě tehdy, když

$$x = \frac{1}{\lambda^k p'(\lambda)} \left(c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{d-1}\lambda^{d-1} \right)$$

pro nějaká $k, c_0, c_1, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{Z}$.

Pisotova čísla

Věta 2. (Pisot 1938, Vijayaraghavan 1941)

Nechť λ je Pisotovo číslo s minimálním polynomem $p(x)$ stupně d. Označme $X_\lambda = \{x \ : \ x\lambda^n \to 0 \mod 1\}$. Pak $x \in X_\lambda$ právě tehdy, když

$$x = \frac{1}{\lambda^k p'(\lambda)} \left(c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{d-1}\lambda^{d-1} \right)$$

pro nějaká $k, c_0, c_1, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{Z}$.

Příklad: Zlatý řez τ má
$p(x) = x^2 - x - 1, \quad p'(x) = 2x - 1$ a $p'(\tau) = \sqrt{5}$.

Pisotova čísla

Věta 2. (Pisot 1938, Vijayaraghavan 1941)

Nechť λ je Pisotovo číslo s minimálním polynomem $p(x)$ stupně d. Označme $X_\lambda = \{x \; : \; x\lambda^n \to 0 \mod 1\}$. Pak $x \in X_\lambda$ právě tehdy, když

$$x = \frac{1}{\lambda^k p'(\lambda)} \left(c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{d-1}\lambda^{d-1} \right)$$

pro nějaká $k, c_0, c_1, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{Z}$.

Příklad: Zlatý řez τ má
$p(x) = x^2 - x - 1, \quad p'(x) = 2x - 1$ a $p'(\tau) = \sqrt{5}$.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\tau^0 p'(\tau)} \Big(1 + 0.\tau \Big) \in X_\tau \quad \text{a} \quad 1 = \frac{1}{\tau^0 p'(\tau)} \Big(-1 + 2.\tau \Big) \in X_\tau$$

Kwapiszův důkaz

Věta 1. (Pisot 1938, Vijayaraghavan 1941)

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$ je algebraické číslo. Pak následující dvě vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. λ je algebraické celé číslo a všechna jemu sdružená čísla jsou v absolutní hodnotně menší než 1;
2. Existuje $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x\lambda^n \; = \; 0 \mod 1$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \min\{|x\lambda^n - k| \; : \; k \in \mathbb{Z}\} = 0$$

Kwapiszův důkaz

Věta 1. (Pisot 1938, Vijayaraghavan 1941)

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$ je algebraické číslo. Pak následující dvě vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. λ je algebraické celé číslo a všechna jemu sdružená čísla jsou v absolutní hodnotně menší než 1;
2. Existuje $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x\lambda^n = 0 \mod 1$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \min\{|x\lambda^n - k| \, : \, k \in \mathbb{Z}\} = 0$$

Implikace $1 \implies 2$ jednoduchá, přes rekurentní posloupnosti.

Kwapiszův důkaz

Věta 1. (Pisot 1938, Vijayaraghavan 1941)

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$ je algebraické číslo. Pak následující dvě vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. λ je algebraické celé číslo a všechna jemu sdružená čísla jsou v absolutní hodnotně menší než 1;
2. Existuje $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} x\lambda^n \; = \; 0 \mod 1$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \min\{|x\lambda^n - k| \, : \, k \in \mathbb{Z}\} = 0$$

Implikace $1 \Longrightarrow 2$ jednoduchá, přes rekurentní posloupnosti.
Implikace $2 \Longrightarrow 1$ zajímavější.
Jaroslaw Kwapisz: *A dynamical proof of Pisot's Theorem*, Canad. Math. Bull, **49** (1), 2006, pp.108–112.

Minimální polynom

Vlastnosti minimálního polynomu

$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \ldots - a_1 x - a_0$

Minimální polynom

Vlastnosti minimálního polynomu
$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \ldots - a_1 x - a_0$

- je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$

Minimální polynom

Vlastnosti minimálního polynomu
$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \ldots - a_1 x - a_0$

- je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$
- má všechny kořený různé

Minimální polynom

Vlastnosti minimálního polynomu
$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \ldots - a_1 x - a_0$

- je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$
- má všechny kořený různé
- je charakteristickým polynomem **matice společnice**

$$A = \begin{pmatrix} a_{d-1} & a_{d-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Minimální polynom

Vlastnosti minimálního polynomu
$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \ldots - a_1 x - a_0$

- je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$
- má všechny kořený různé
- je charakteristickým polynomem **matice společnice**

$$A = \begin{pmatrix} a_{d-1} & a_{d-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy A je diagonalizovatelná v $\mathbb{C}^d$.

Matice s reálnými prvky

- Nechť $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ a $\omega_1, \ldots, \omega_n$ jsou nějaké její vlastní vektory. Pak $P := \mathrm{lin}[\omega_1, \ldots, \omega_n]$ je invariantní podprostor matice A, tj. $AP \subset P$.

Matice s reálnými prvky

- Nechť $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ a $\omega_1, \dots, \omega_n$ jsou nějaké její vlastní vektory. Pak $P := \mathrm{lin}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ je invariantní podprostor matice A, tj. $AP \subset P$.
- Nechť $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ je diagonalizovatelná. Označme
  $P_s :=$ lineární obal vlastních vektorů k vlastním číslům $|\mu| < 1$
  $P_u :=$ lineární obal vlastních vektorů k vlastním číslům $|\mu| = 1$
  $P_b :=$ lineární obal vlastních vektorů k vlastním číslům $|\mu| > 1$
  Pak
  $$\mathbb{C}^n = P_s \oplus P_u \oplus P_b$$

Matice s reálnými prvky

- Nechť $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ a $\omega_1, \ldots, \omega_n$ jsou nějaké její vlastní vektory. Pak $P := \mathrm{lin}[\omega_1, \ldots, \omega_n]$ je invariantní podprostor matice A, tj. $AP \subset P$.
- Nechť $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ je diagonalizovatelná. Označme
  $P_s :=$ lineární obal vlastních vektorů k vlastním číslům $|\mu| < 1$
  $P_u :=$ lineární obal vlastních vektorů k vlastním číslům $|\mu| = 1$
  $P_b :=$ lineární obal vlastních vektorů k vlastním číslům $|\mu| > 1$
  Pak
  $$\mathbb{C}^n = P_s \oplus P_u \oplus P_b$$
  a také
  $$\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_u \oplus E_b,$$
  kde
  $$E_s = P_s \cap \mathbb{R}^d, \quad E_u = P_u \cap \mathbb{R}^d, E_b = P_b \cap \mathbb{R}^d$$

Matice s racionálními prvky

Lemma 0.

Nechť $A \in \mathbb{Q}^{d \times d}$. Pak matice A má NEtriviální invariantní podprostor $P \subset \mathbb{Q}^d$ právě tehdy, když charakteristický polynom matice A je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

Kwapiszova lemmata

Lemma 1.

Nechť $A \in \mathbb{Q}^{d \times d}$ má ireducibilní charakterisitcký polynom a nechť existují vektory $v_0 \in \mathbb{R}^d \setminus E_s$ a $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ takové, že $(A^n v_0)^\top k_0 \mapsto 0 \mod 1$. Pak vlastní čísla matice A jsou algebraická celá.

Lemma 2.

Nechť $A \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ má ireducibilní charakterisitcký polynom a nechť existují vektory $v_0 \in \mathbb{R}^d \setminus E_s$ a $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ takové, že $(A^n v_0)^\top k_0 \mapsto 0 \mod 1$. Pak $v_0 \in \mathbb{Q}^d + E_s$.

Důkaz implikace $2 \Longrightarrow 1$

Předpoklady:
$\lambda > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ
$x\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$ pro nějaké $x \neq 0$.

Důkaz implikace $2 \Longrightarrow 1$

Předpoklady:
$\lambda > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ
$x\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$ pro nějaké $x \neq 0$.

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.

Důkaz implikace $2 \Longrightarrow 1$

Předpoklady:
$\lambda > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ
$x\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$ pro nějaké $x \neq 0$.

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.

Dk. Množina $V := \{k \in \mathbb{Q}^d : \omega^\top k = 0\}$ je uzavřena na racionální kombinace, tj. je to racionální podprostor prostoru $\mathbb{Q}^d$.
Navíc
$\omega^\top k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\omega^\top k = 0 \quad \Rightarrow \quad (A\omega)^\top k = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^\top (A^\top k) = 0.$

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1

Předpoklady:
$\lambda > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ
$x\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$ pro nějaké $x \neq 0$.

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.

Dk. Množina $V := \{k \in \mathbb{Q}^d : \omega^\top k = 0\}$ je uzavřena na racionální kombinace, tj. je to racionální podprostor prostoru $\mathbb{Q}^d$.
Navíc
$\omega^\top k = 0 \Rightarrow \lambda\omega^\top k = 0 \Rightarrow (A\omega)^\top k = 0 \Rightarrow \omega^\top(A^\top k) = 0$. Tedy M je racionální podprostor invariantní vůči $A^\top$. Matice $A^\top$ má ireducibilní charakteristický polynom, proto je V triviální podprostor.

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1

Předpoklady:
$\lambda > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ
$x\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$ pro nějaké $x \neq 0$.

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.

Dk. Množina $V := \{k \in \mathbb{Q}^d : \omega^\top k = 0\}$ je uzavřena na racionální kombinace, tj. je to racionální podprostor prostoru $\mathbb{Q}^d$.
Navíc
$\omega^\top k = 0 \Rightarrow \lambda\omega^\top k = 0 \Rightarrow (A\omega)^\top k = 0 \Rightarrow \omega^\top(A^\top k) = 0$. Tedy M je racionální podprostor invariantní vůči $A^\top$. Matice $A^\top$ má ireducibilní charakteristický polynom, proto je V triviální podprostor. Jelikož $\dim V < d$, je nutně $\dim V = 0$, a tedy $k_0 \notin V$.

Důkaz implikace $2 \Longrightarrow 1$

Předpoklady:
$\lambda > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ
$x\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$ pro nějaké $x \neq 0$.

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.

Důkaz implikace $2 \implies 1$

Předpoklady:
$\lambda > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ
$x\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$ pro nějaké $x \neq 0$.

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.
BÚNO: vezmeme takový násobek ω, že $\omega^\top k_0 = x$.

Důkaz implikace $2 \implies 1$

Předpoklady:
$\lambda > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ
$x\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$ pro nějaké $x \neq 0$.

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.
BÚNO: vezmeme takový násobek ω, že $\omega^\top k_0 = x$. Pak

$$x\lambda^n = \lambda^n \omega^\top k_0 = (A^n \omega)^\top k_0 \mapsto 0 \mod 1$$

Důkaz implikace $2 \implies 1$

Předpoklady:
$\lambda > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ
$x\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$ pro nějaké $x \neq 0$.

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.
BÚNO: vezmeme takový násobek ω, že $\omega^\top k_0 = x$. Pak

$$x\lambda^n = \lambda^n \omega^\top k_0 = (A^n \omega)^\top k_0 \mapsto 0 \mod 1$$

Protože $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus E_s$, podle Lemmat 1 a 2 platí, že

Důkaz implikace $2 \implies 1$

Předpoklady:
$\lambda > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ
$x\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$ pro nějaké $x \neq 0$.

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.
BÚNO: vezmeme takový násobek ω, že $\omega^\top k_0 = x$. Pak

$$x\lambda^n = \lambda^n \omega^\top k_0 = (A^n \omega)^\top k_0 \mapsto 0 \mod 1$$

Protože $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus E_s$, podle Lemmat 1 a 2 platí, že

- λ je algebraické celé
- $\omega \in \mathbb{Q}^d + E_s$, tj. $\omega = q_0 + \varepsilon$, kde $\varepsilon \in E_s$ a $q_0 \in \mathbb{Q}^d$.

závěr důkazu

$$\omega = q_0 + \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varepsilon \in E_s \text{ a } q_0 \in \mathbb{Q}^d$$

závěr důkazu

$$\omega = q_0 + \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varepsilon \in E_s \text{ a } q_0 \in \mathbb{Q}^d$$

Položme

$$P = \big(\text{lin}[\omega] + E_s\big) \cap \mathbb{Q}^d$$

závěr důkazu

$$\omega = q_0 + \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varepsilon \in E_s \text{ a } q_0 \in \mathbb{Q}^d$$

Položme

$$P = \left(\mathrm{lin}[\omega] + E_s\right) \cap \mathbb{Q}^d$$

Zřejmě

$$AP \subset P \quad \text{a} \quad 0 \neq q_0 \in P \subset \mathbb{Q}^d$$

závěr důkazu

$$\omega = q_0 + \varepsilon, \qquad \text{kde} \quad \varepsilon \in E_s \text{ a } q_0 \in \mathbb{Q}^d$$

Položme

$$P = \big(\mathrm{lin}[\omega] + E_s\big) \cap \mathbb{Q}^d$$

Zřejmě

$$AP \subset P \quad \text{a} \quad 0 \neq q_0 \in P \subset \mathbb{Q}^d$$

Iredukcibilita A implikuje triviálnost P.

$$\dim P = d,$$

závěr důkazu

$$\omega = q_0 + \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varepsilon \in E_s \text{ a } q_0 \in \mathbb{Q}^d$$

Položme

$$P = \big(\mathrm{lin}[\omega] + E_s\big) \cap \mathbb{Q}^d$$

Zřejmě

$$AP \subset P \quad \text{a} \quad 0 \neq q_0 \in P \subset \mathbb{Q}^d$$

Ireducibilita A implikuje triviálnost P.

$$\dim P = d, \quad \text{a tedy} \quad \dim E_s = d - 1$$

Komplexní Pisotova čísla

Komplexní Pisotova čísla

Věta

Nechť $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|\lambda| > 1$ je algebraické číslo. Pak následující dvě vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. λ je algebraické celé číslo a všechna jemu sdružená čísla s výjimkou $\overline{\lambda}$ jsou v absolutní hodnotně menší než 1;
2. $\lim_{n\to\infty} 2Re(\lambda^n) = 0 \mod 1$.

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1 pro komplexní Pisot

Předpoklady:

$|\lambda| > 1$ je algebraické číslo,

A matice společnice minimálního polynomu čísla λ

ω vlastní vektor matice A k λ,

$\overline{\omega}$ vlastní vektor matice A k $\overline{\lambda}$

$2Re\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1 pro komplexní Pisot

Předpoklady:
$|\lambda| > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ,
$\overline{\omega}$ vlastní vektor matice A k $\overline{\lambda}$
$2Re\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1 pro komplexní Pisot

Předpoklady:
$|\lambda| > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ,
$\overline{\omega}$ vlastní vektor matice A k $\overline{\lambda}$
$2Re\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.

Dk. Množina $V := \{k \in \mathbb{Q}^d : \omega^\top k = 0\}$ je uzavřena na racionální kombinace, tj. je to racionální podprostor prostoru $\mathbb{Q}^d$.
Navíc

$$\omega^\top k = 0 \;\Rightarrow\; \lambda\omega^\top k = 0 \;\Rightarrow\; (A\omega)^\top k = 0 \;\Rightarrow\; \omega^\top (A^\top k) = 0.$$

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1 pro komplexní Pisot

Předpoklady:
$|\lambda| > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ,
$\overline{\omega}$ vlastní vektor matice A k $\overline{\lambda}$
$2Re\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.

Dk. Množina $V := \{k \in \mathbb{Q}^d \ : \ \omega^\top k = 0\}$ je uzavřena na racionální kombinace, tj. je to racionální podprostor prostoru $\mathbb{Q}^d$.
Navíc
$\omega^\top k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\omega^\top k = 0 \quad \Rightarrow \quad (A\omega)^\top k = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^\top(A^\top k) = 0$. Tedy M je racionální podprostor invariantní vůči $A^\top$. Matice $A^\top$ má ireducibilní charakteristický polynom, proto je V triviální podprostor.

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1 pro komplexní Pisot

Předpoklady:
$|\lambda| > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ,
$\overline{\omega}$ vlastní vektor matice A k $\overline{\lambda}$
$2Re\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.

Dk. Množina $V := \{k \in \mathbb{Q}^d \,:\, \omega^\top k = 0\}$ je uzavřena na racionální kombinace, tj. je to racionální podprostor prostoru $\mathbb{Q}^d$.
Navíc
$\omega^\top k = 0 \;\Rightarrow\; \lambda\omega^\top k = 0 \;\Rightarrow\; (A\omega)^\top k = 0 \;\Rightarrow\; \omega^\top (A^\top k) = 0$. Tedy M je racionální podprostor invariantní vůči $A^\top$. Matice $A^\top$ má ireducibilní charakteristický polynom, proto je V triviální podprostor. Jelikož $\dim V < d$, je nutně $\dim V = 0$, a tedy $k_0 \notin V$.

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1 pro komplexní Pisot

Předpoklady:

$\lambda > 1$ je algebraické číslo,

A matice společnice minimálního polynomu čísla λ

ω vlastní vektor matice A k λ,

$\overline{\omega}$ vlastní vektor matice A k $\overline{\lambda}$

$2Re\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1 pro komplexní Pisot

Předpoklady:

$\lambda > 1$ je algebraické číslo,

A matice společnice minimálního polynomu čísla λ

ω vlastní vektor matice A k λ,

$\overline{\omega}$ vlastní vektor matice A k $\overline{\lambda}$

$2Re\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1 pro komplexní Pisot

Předpoklady:

$\lambda > 1$ je algebraické číslo,

A matice společnice minimálního polynomu čísla λ

ω vlastní vektor matice A k λ,

$\overline{\omega}$ vlastní vektor matice A k $\overline{\lambda}$

$2Re\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.
BÚNO: vezmeme takový násobek ω, že $\omega^\top k_0 = 1$. Pak

$$\lambda^n = \lambda^n \omega^\top k_0 = (A^n \omega)^\top k_0$$

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1 pro komplexní Pisot

Předpoklady:

$\lambda > 1$ je algebraické číslo,

A matice společnice minimálního polynomu čísla λ

ω vlastní vektor matice A k λ,

$\overline{\omega}$ vlastní vektor matice A k $\overline{\lambda}$

$2Re\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.
BÚNO: vezmeme takový násobek ω, že $\omega^\top k_0 = 1$. Pak

$$\lambda^n = \lambda^n \omega^\top k_0 = (A^n\omega)^\top k_0$$

$$2Re(\lambda^n) = \lambda^n + \overline{\lambda^n} = (A^n\omega)^\top k_0 + (A^n\overline{\omega})^\top k_0 = \left(A^n(\omega+\overline{\omega})\right)^\top k_0 \mapsto 0 \mod 1$$

Důkaz implikace $2 \Longrightarrow 1$ pro komplexní Pisot

Předpoklady:

$\lambda > 1$ je algebraické číslo,

A matice společnice minimálního polynomu čísla λ

ω vlastní vektor matice A k λ,

$\overline{\omega}$ vlastní vektor matice A k $\overline{\lambda}$

$2Re\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.
BÚNO: vezmeme takový násobek ω, že $\omega^\top k_0 = 1$. Pak

$$\lambda^n = \lambda^n \omega^\top k_0 = (A^n\omega)^\top k_0$$

$$2Re(\lambda^n) = \lambda^n + \overline{\lambda^n} = (A^n\omega)^\top k_0 + (A^n\overline{\omega})^\top k_0 = \big(A^n(\omega+\overline{\omega})\big)^\top k_0 \mapsto 0 \mod 1$$

Protože $\omega + \overline{\omega} \in \mathbb{R}^d \setminus E_s$, podle Lemmat 1 a 2 platí, že

Důkaz implikace 2 $\Longrightarrow$ 1 pro komplexní Pisot

Předpoklady:
$\lambda > 1$ je algebraické číslo,
A matice společnice minimálního polynomu čísla λ
ω vlastní vektor matice A k λ,
$\overline{\omega}$ vlastní vektor matice A k $\overline{\lambda}$
$2Re\lambda^n \mapsto 0 \mod 1$

Claim: Zvolme $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Pak $\omega^\top k_0 \neq 0$.
BÚNO: vezmeme takový násobek ω, že $\omega^\top k_0 = 1$. Pak

$$\lambda^n = \lambda^n \omega^\top k_0 = (A^n\omega)^\top k_0$$

$$2Re(\lambda^n) = \lambda^n + \overline{\lambda^n} = (A^n\omega)^\top k_0 + (A^n\overline{\omega})^\top k_0 = \left(A^n(\omega+\overline{\omega})\right)^\top k_0 \mapsto 0 \mod 1$$

Protože $\omega + \overline{\omega} \in \mathbb{R}^d \setminus E_s$, podle Lemmat 1 a 2 platí, že

- λ je algebraické celé
- $\omega + \overline{\omega} \in \mathbb{Q}^d + E_s$, tj. $\omega + \overline{\omega} = q_0 + \varepsilon$, kde $\varepsilon \in E_s$ a $q_0 \in \mathbb{Q}^d$.

závěr důkazu pro komplexní Pisot

$$\omega + \overline{\omega} = q_0 + \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varepsilon \in E_s \text{ a } q_0 \in \mathbb{Q}^d$$

závěr důkazu pro komplexní Pisot

$$\omega + \overline{\omega} = q_0 + \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varepsilon \in E_s \text{ a } q_0 \in \mathbb{Q}^d$$

Položme

$$P = \left(\text{lin}[\omega + \overline{\omega}, i(\omega - \overline{\omega})] + E_s\right) \cap \mathbb{Q}^d$$

závěr důkazu pro komplexní Pisot

$$\omega + \overline{\omega} = q_0 + \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varepsilon \in E_s \text{ a } q_0 \in \mathbb{Q}^d$$

Položme

$$P = \left(\text{lin}[\omega + \overline{\omega}, i(\omega - \overline{\omega})] + E_s\right) \cap \mathbb{Q}^d$$

Zřejmě

$$AP \subset P \quad \text{a} \quad 0 \neq q_0 \in P \subset \mathbb{Q}^d$$

závěr důkazu pro komplexní Pisot

$$\omega + \overline{\omega} = q_0 + \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varepsilon \in E_s \text{ a } q_0 \in \mathbb{Q}^d$$

Položme

$$P = \left(\operatorname{lin}[\omega + \overline{\omega}, i(\omega - \overline{\omega})] + E_s\right) \cap \mathbb{Q}^d$$

Zřejmě

$$AP \subset P \quad \text{a} \quad 0 \neq q_0 \in P \subset \mathbb{Q}^d$$

Ireducibilita A implikuje triviálnost P.

$$\dim P = d,$$

závěr důkazu pro komplexní Pisot

$$\omega + \overline{\omega} = q_0 + \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varepsilon \in E_s \text{ a } q_0 \in \mathbb{Q}^d$$

Položme

$$P = \left(\text{lin}[\omega + \overline{\omega}, i(\omega - \overline{\omega})] + E_s\right) \cap \mathbb{Q}^d$$

Zřejmě

$$AP \subset P \quad \text{a} \quad 0 \neq q_0 \in P \subset \mathbb{Q}^d$$

Ireducibilita A implikuje triviálnost P.

$$\dim P = d, \quad \text{a tedy} \quad \dim E_s = d - 2$$

Příklad

$\beta = i - 1$ má minimální polynom $x^2 + 2x + 2$
$\beta^n \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$
Platí:

$$2Re(\beta^n) \in \mathbb{Z}$$

Příklad

$\beta = i - 1$ má minimální polynom $x^2 + 2x + 2$
$\beta^n \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib \; : \; a, b \in \mathbb{Z}\}$
Platí:

$$2Re(\beta^n) \in \mathbb{Z} \quad \text{a} \quad 2Im(\beta^n) \in \mathbb{Z}$$

Obecně: lze zaměnit $2Im(\lambda^n) \mapsto 0 \mod 1$?

Díky za pozornost