Pohstův prvočíselný problém a aritmetické posloupnosti

Zuzana Masáková

Podle článku:
L. Hajdu, *Arithmetic Progressions in Linear Combinations of S-units, Period. Math. Hung.* **54** *(2007), 5161.*

15. listopadu 2011

Pohstův problém

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$?

$$2 =$$

Pohstův problém

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$?

$$2 = 2^0 + 3^0$$

$$3 =$$

Pohstův problém

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$?

$$2 = 2^0 + 3^0$$

$$3 = 2^1 + 3^0$$

$$5 =$$

Pohstův problém

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$?

$$2 = 2^0 + 3^0$$

$$3 = 2^1 + 3^0$$

$$5 = 2^1 + 3^1$$

$$7 =$$

Pohstův problém

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$?

$$\begin{aligned} 2 &= 2^0 + 3^0 \\ 3 &= 2^1 + 3^0 \\ 5 &= 2^1 + 3^1 \\ 7 &= 2^2 + 3^1 \\ 11 &= \end{aligned}$$

Pohstův problém

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$?

$$
\begin{aligned}
2 &= 2^0 + 3^0 \\
3 &= 2^1 + 3^0 \\
5 &= 2^1 + 3^1 \\
7 &= 2^2 + 3^1 \\
11 &= 2^1 + 3^2 \\
13 &=
\end{aligned}
$$

Pohstův problém

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$?

$$\begin{aligned} 2 &= 2^0 + 3^0 \\ 3 &= 2^1 + 3^0 \\ 5 &= 2^1 + 3^1 \\ 7 &= 2^2 + 3^1 \\ 11 &= 2^1 + 3^2 \\ 13 &= 2^2 + 3^2 \end{aligned}$$

Pohstův problém

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$?

$$\begin{aligned}
2 &= 2^0 + 3^0 \\
3 &= 2^1 + 3^0 \\
5 &= 2^1 + 3^1 \\
7 &= 2^2 + 3^1 \\
11 &= 2^1 + 3^2 \\
13 &= 2^2 + 3^2 = 2^8 - 3^5 \\
17 &=
\end{aligned}$$

Pohstův problém

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$?

$$
\begin{aligned}
2 &= 2^0 + 3^0 \\
3 &= 2^1 + 3^0 \\
5 &= 2^1 + 3^1 \\
7 &= 2^2 + 3^1 \\
11 &= 2^1 + 3^2 \\
13 &= 2^2 + 3^2 = 2^8 - 3^5 \\
17 &= 2^3 + 3^2 = 2^4 + 3^2 \\
19 &=
\end{aligned}
$$

Pohstův problém

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$?

$$\begin{aligned}
2 &= 2^0 + 3^0 \\
3 &= 2^1 + 3^0 \\
5 &= 2^1 + 3^1 \\
7 &= 2^2 + 3^1 \\
11 &= 2^1 + 3^2 \\
13 &= 2^2 + 3^2 = 2^8 - 3^5 \\
17 &= 2^3 + 3^2 = 2^4 + 3^2 \\
19 &= 2^4 + 3^1 \\
23 &=
\end{aligned}$$

Pohstův problém

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$?

$$\begin{aligned}
2 &= 2^0 + 3^0 \\
3 &= 2^1 + 3^0 \\
5 &= 2^1 + 3^1 \\
7 &= 2^2 + 3^1 \\
11 &= 2^1 + 3^2 \\
13 &= 2^2 + 3^2 = 2^8 - 3^5 \\
17 &= 2^3 + 3^2 = 2^4 + 3^2 \\
19 &= 2^4 + 3^1 \\
23 &= 2^5 - 3^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Značení

K algebraicky uzavřené těleso charakteristiky 0 (má prvotěleso $\mathbb{Q}$)

Značení

K algebraicky uzavřené těleso charakteristiky 0 (má prvotěleso $\mathbb{Q}$)
Γ multiplikativní podgrupa K^* konečného ranku r

Značení

K algebraicky uzavřené těleso charakteristiky 0 (má prvotěleso $\mathbb{Q}$)
Γ multiplikativní podgrupa K^* konečného ranku r

Příklady:

$$\Gamma = \{\pm 1\},$$

Značení

K algebraicky uzavřené těleso charakteristiky 0 (má prvotěleso $\mathbb{Q}$)
Γ multiplikativní podgrupa K^* konečného ranku r

Příklady:

$$\Gamma = \{\pm 1\}, \qquad \Gamma = \{\pm \tau^k \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

Značení

K algebraicky uzavřené těleso charakteristiky 0 (má prvotěleso $\mathbb{Q}$)
Γ multiplikativní podgrupa K^* konečného ranku r

Příklady:

$$\Gamma = \{\pm 1\}, \qquad \Gamma = \{\pm\tau^k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \Gamma = \{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

Značení

K algebraicky uzavřené těleso charakteristiky 0 (má prvotěleso $\mathbb{Q}$)
Γ multiplikativní podgrupa K^* konečného ranku r

Příklady:

$$\Gamma = \{\pm 1\}, \qquad \Gamma = \{\pm \tau^k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \Gamma = \{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

S neprázdná konečná množina prvočísel,

$$\mathbb{Z}_S = \{m \in \mathbb{Z} \mid p \text{ prvočíslo, } p|m \Rightarrow p \in S\},$$

$$\Gamma = U_S = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z} \setminus 0,\ p \perp q,\ pq \in \mathbb{Z}_S \right\}.$$

Značení

K algebraicky uzavřené těleso charakteristiky 0 (má prvotěleso $\mathbb{Q}$)
Γ multiplikativní podgrupa K^* konečného ranku r

Příklady:

$$\Gamma = \{\pm 1\}, \qquad \Gamma = \{\pm\tau^k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \Gamma = \{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

S neprázdná konečná množina prvočísel,

$$\mathbb{Z}_S = \{m \in \mathbb{Z} \mid p \text{ prvočíslo}, \ p|m \Rightarrow p \in S\},$$

$$\Gamma = U_S = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z} \setminus 0, \ p \perp q, \ pq \in \mathbb{Z}_S \right\}.$$

$t \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ neprázdná konečná podmnožina K^t

$$H_t(\Gamma, \mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i x_i \;\middle|\; (a_1, \ldots, a_t) \in \mathcal{A}, \ (x_1, \ldots, x_t) \in \Gamma^t \right\}.$$

Věta první

K algebraicky uzavřené těleso charakteristiky 0
Γ multiplikativní podgrupa K^* konečného ranku **r**
t $\in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ podmnožina K^t o **n** prvcích

$$H_t(\Gamma, \mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i x_i \;\middle|\; (a_1, \ldots, a_t) \in \mathcal{A},\ (x_1, \ldots, x_t) \in \Gamma^t \right\}.$$

Věta první

K algebraicky uzavřené těleso charakteristiky 0
Γ multiplikativní podgrupa K^* konečného ranku **r**
t $\in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ podmnožina K^t o **n** prvcích

$$H_t(\Gamma, \mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i x_i \;\middle|\; (a_1, \ldots, a_t) \in \mathcal{A},\ (x_1, \ldots, x_t) \in \Gamma^t \right\}.$$

Věta (Hajdu 2006)

Pro každé r, t, n existuje $C(r, t, n)$ tak, že pro každou podgrupu Γ ranku r a každou n-prvkovou abecedu $\mathcal{A}$ délka každé nekonstantní aritmetické posloupnosti v $H_t(\Gamma, \mathcal{A})$ je omezena konstantou $C(r, t, n)$.

První poznámka k první větě

Závislost konstanty $C(r, t, n)$ na r, t, n nelze vynechat:

První poznámka k první větě

Závislost konstanty $C(r,t,n)$ na r,t,n nelze vynechat:

Příklad 1:
t pevné, $\Gamma = \{-1,1\}$, $\mathcal{A} = \{(1,\dots,1)\}$,

$$H_t(\Gamma,\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} x_i \,\middle|\, x_i \in \{-1,1\} \right\}$$

obsahuje aritmetickou posloupnost délky $t+1$:

$$\begin{aligned}
-t &= (-1) + (-1) + \cdots + (-1) + (-1) \\
-t+2 &= 1 + (-1) + \cdots + (-1) + (-1) \\
&\vdots \\
t-2 &= 1 + 1 + \cdots + 1 + (-1) \\
t &= 1 + 1 + \cdots + 1 + 1
\end{aligned}$$

První poznámka k první větě

Závislost konstanty $C(r, t, n)$ na r, t, n nelze vynechat:

Příklad 2:

$t = 1$, $\Gamma = \{1\}$, $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$H_1(\Gamma, \mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{1} a_i \,\middle|\, a_i \in \mathcal{A} \right\} = \mathcal{A}$$

obsahuje aritmetickou posloupnost $1, 2, \ldots, n$ délky n.

První poznámka k první větě

Závislost konstanty $C(r, t, n)$ na r, t, n nelze vynechat:

Příklad 3:

$t = 1$, $\mathcal{A} = \{1\}$,
pro pevné $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, vezmi $S = \{p \mid p \text{ je prvočíslo}, p|k!\}$
$\Gamma = U_S$, rank Γ je $r = |S| + 1 = \pi(k) + 1$.

$$H_1(\Gamma, \mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{1} x_i \,\middle|\, x_i \in U_S \right\} = U_S$$

obsahuje aritm. posloupnost $1, 2, \ldots, k$ délky k (závislost na r).

Druhá poznámka k první větě

Počet aritmetických posloupností v $H_t(\Gamma, S)$ není omezený:

Druhá poznámka k první větě

Počet aritmetických posloupností v $H_t(\Gamma, S)$ není omezený:

Příklad 1:

$t = 1$, $\Gamma = U_S$ pro $S = \{2\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1\}$,

$$H_1(\Gamma, \mathcal{A}) = \{ax \mid a \in \{0,1\}, x \in \Gamma_S\} = U_S \cup \{0\}$$

obsahuje aritmetickou posloupnost $0, 2^u, 2^{u+1}$ pro každé $u \in \mathbb{N}_0$.

Druhá poznámka k první větě

Počet aritmetických posloupností v $H_t(\Gamma, S)$ není omezený:

Příklad 1:

$t = 1$, $\Gamma = U_S$ pro $S = \{2\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1\}$,

$$H_1(\Gamma, \mathcal{A}) = \{ax \mid a \in \{0, 1\}, x \in \Gamma_S\} = U_S \cup \{0\}$$

obsahuje aritmetickou posloupnost $0, 2^u, 2^{u+1}$ pro každé $u \in \mathbb{N}_0$.

Příklad 2:

$t = 2$, $\mathcal{A}' = \{(0, 1), (1, 1)\}$,

$$1, 2^u + 1, 2^{u+1} + 1\,, \quad u \in \mathbb{N}_0\,,$$

je aritmetická posloupnost v $H_2(\Gamma, \mathcal{A}')$.

Druhá poznámka k první větě

Počet aritmetických posloupností v $H_t(\Gamma, S)$ není omezený:

Obecně:

Když $q_1, \ \ldots, \ q_l$ je aritmetická posloupnost v $H_t(\Gamma, \mathcal{A})$,

pak $q_1 + x, \ \ldots, \ q_l + x$ je pro každé $x \in \Gamma$ aritmetická

posloupnost v $H_{t+1}(\Gamma, \mathcal{A}')$ pro vhodnou $\mathcal{A}'$.

Druhá poznámka k první větě

Počet aritmetických posloupností v $H_t(\Gamma, S)$ není omezený:

Obecně:
Když $q_1, \ldots, q_l$ je aritmetická posloupnost v $H_t(\Gamma, \mathcal{A})$,

pak $q_1 + x, \ldots, q_l + x$ je pro každé $x \in \Gamma$ aritmetická

posloupnost v $H_{t+1}(\Gamma, \mathcal{A}')$ pro vhodnou $\mathcal{A}'$.

Obecně může $H_t(\Gamma, \mathcal{A})$ obsahovat nekonečně mnoho aritmetických posloupností.

Věta druhá

Věta (Green and Tao 2004)

Existují libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti prvočísel.

Věta druhá

Věta (Green and Tao 2004)

Existují libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti prvočísel.

Pro zajímavost:

Věta (Tao and Ziegler 2006)

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ *a polynomy* $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{Z}[x]$, $P_i(0) = 0$, *existuje nekonečně mnoho* $a, m \in \mathbb{Z}$ *tak, že*

$$a + P_1(m),\ \ldots,\ a + P_k(m)$$

jsou prvočísla.

Věta druhá

Věta (Green and Tao 2004)

Existují libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti prvočísel.

Pro zajímavost:

Věta (Tao and Ziegler 2006)

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ *a polynomy* $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{Z}[x]$, $P_i(0) = 0$, *existuje nekonečně mnoho* $a, m \in \mathbb{Z}$ *tak, že*

$$a + P_1(m),\ \ldots,\ a + P_k(m)$$

jsou prvočísla.

Dává Greenovu–Taovu větu pro

$$P_1(m) = m,\ P_2(m) = 2m,\ \ldots,\ P_k(m) = km.$$

Věta druhá

Věta (Green and Tao 2004)

Existují libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti prvočísel.

Pro zajímavost:

Nejdelší známá aritmetická posloupnost prvočísel - délky 26

$$43\,142\,746\,595\,714\,191 \quad + \quad 23\,681\,770 \;\cdot\; 223\,092\,870\; j\,,$$

pro j = 0,. . . 25. Pozn.

$$223\,092\,870 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23\,.$$

(Projekt PrimeGrid - Perichaud 2010)

Věta třetí

Věta (Hajdu 2006)

Pro každé $S = \{p_1, \dots, p_s\}$, $t \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^t$ existuje nekonečně mnoho prvočísel mimo množinu

$$H_t(\mathbb{Z}_S, \mathcal{A}) := \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i s_i \;\middle|\; (a_1, \dots, a_t) \in \mathcal{A},\ (s_1, \dots, s_t) \in \mathbb{Z}_S^t \right\}.$$

Věta třetí

Věta (Hajdu 2006)

Pro každé $S = \{p_1, \ldots, p_s\}$, $t \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^t$ existuje nekonečně mnoho prvočísel mimo množinu

$$H_t(\mathbb{Z}_S, \mathcal{A}) := \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i s_i \;\middle|\; (a_1, \ldots, a_t) \in \mathcal{A},\ (s_1, \ldots, s_t) \in \mathbb{Z}_S^t \right\}.$$

Důkaz

$t \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_S \subset \Gamma = U_S$, rank Γ je $r = |S| + 1$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^t$, $|\mathcal{A}| = n$.

Věta třetí

Věta (Hajdu 2006)

Pro každé $S = \{p_1, \ldots, p_s\}$, $t \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^t$ existuje nekonečně mnoho prvočísel mimo množinu

$$H_t(\mathbb{Z}_S, \mathcal{A}) := \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i s_i \;\middle|\; (a_1, \ldots, a_t) \in \mathcal{A},\ (s_1, \ldots, s_t) \in \mathbb{Z}_S^t \right\}.$$

Důkaz

$t \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_S \subset \Gamma = U_S$, rank Γ je $r = |S| + 1$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^t$, $|\mathcal{A}| = n$.

Z Greenovy-Taovy věty existuje nekonečně mnoho po dvou disjunktních aritmetických posloupností délky $C(r, t, n) + 1$.

Věta třetí

Věta (Hajdu 2006)

Pro každé $S = \{p_1, \dots, p_s\}$, $t \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^t$ existuje nekonečně mnoho prvočísel mimo množinu

$$H_t(\mathbb{Z}_S, \mathcal{A}) := \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i s_i \;\middle|\; (a_1, \dots, a_t) \in \mathcal{A},\ (s_1, \dots, s_t) \in \mathbb{Z}_S^t \right\}.$$

Důkaz

$t \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_S \subset \Gamma = U_S$, rank Γ je $r = |S| + 1$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^t$, $|\mathcal{A}| = n$.

Z Greenovy-Taovy věty existuje nekonečně mnoho po dvou disjunktních aritmetických posloupností délky $C(r, t, n) + 1$.

Podle věty první v každé z nich musí být alespoň jedno prvočíslo mimo $H_t(U_S, \mathcal{A}) \supset H_t(\mathbb{Z}_S, \mathcal{A})$.

Věta třetí

Věta (Hajdu 2006)

Pro každé $S = \{p_1, \dots, p_r\}$, $t \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^t$ existuje nekonečně mnoho prvočísel mimo množinu

$$H_t(\mathbb{Z}_S, \mathcal{A}) := \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i s_i \;\middle|\; (a_1, \dots, a_t) \in \mathcal{A},\ (s_1, \dots, s_t) \in \mathbb{Z}_S^t \right\}.$$

Věta třetí

Věta (Hajdu 2006)

Pro každé $S = \{p_1, \ldots, p_r\}$, $t \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^t$ existuje nekonečně mnoho prvočísel mimo množinu

$$H_t(\mathbb{Z}_S, \mathcal{A}) := \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i s_i \;\middle|\; (a_1, \ldots, a_t) \in \mathcal{A},\ (s_1, \ldots, s_t) \in \mathbb{Z}_S^t \right\}.$$

Pozn.

Mersennova prvočísla tvaru $2^u - 1$, $u \in \mathbb{N}$, patří do $H_2(\mathbb{Z}_S, A)$.

Věří se, že těch je nekonečně mnoho.

Obecně tedy asi nelze vylepšit na $|H_t(\mathbb{Z}_S, A)| < +\infty$.

Řešení Pohstova problému

Věta (Hajdu 2006)

Pro každé $S = \{p_1, \ldots, p_r\}$, $t \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^t$ existuje nekonečně mnoho prvočísel mimo množinu

$$H_t(\mathbb{Z}_S, \mathcal{A}) := \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i s_i \;\middle|\; (a_1, \ldots, a_t) \in \mathcal{A},\ (s_1, \ldots, s_t) \in \mathbb{Z}_S^t \right\}.$$

Vezmi $S = \{2, 3\}$, $t = 2$, $A = \{(1, 1)\}$. Pak

$$H_2(\mathbb{Z}_S, A) = \{\pm 2^i 3^j \pm 2^k 3^l \mid i, j, k, l \in \mathbb{N}_0\} \supset \{2^u \pm 3^v \mid u, v \in \mathbb{N}_0\}.$$

Řešení Pohstova problému

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$? **NE!**

Řešení Pohstova problému

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$? **NE!**

$2 = 2^0 + 3^0$	$23 = 2^5 - 3^2$
$3 = 2^1 + 3^0$	$29 = 2^1 + 3^3$
$5 = 2^1 + 3^1$	$31 = 2^2 + 3^3$
$7 = 2^2 + 3^1$	$37 = 2^6 - 3^3$
$11 = 2^1 + 3^2$	$41 = 2^5 + 3^2$
$13 = 2^2 + 3^2$	$43 = 2^4 + 3^3$
$17 = 2^3 + 3^2$	$47 = 2^7 - 3^4$
$19 = 2^4 + 3^1$	$53 = ?$

Řešení Pohstova problému

M. Pohst (TU Berlin) :
Je možné zapsat libovolné prvočíslo p ve tvaru $p = 2^u \pm 3^v$, $u, v \in \mathbb{N}_0$? **NE!**

$2 = 2^0 + 3^0$	$23 = 2^5 - 3^2$
$3 = 2^1 + 3^0$	$29 = 2^1 + 3^3$
$5 = 2^1 + 3^1$	$31 = 2^2 + 3^3$
$7 = 2^2 + 3^1$	$37 = 2^6 - 3^3$
$11 = 2^1 + 3^2$	$41 = 2^5 + 3^2$
$13 = 2^2 + 3^2$	$43 = 2^4 + 3^3$
$17 = 2^3 + 3^2$	$47 = 2^7 - 3^4$
$19 = 2^4 + 3^1$	$53 = ?$

Nejmenší prvočíslo, které nelze takto zapsat je 53.

Děkuji za pozornost.