Kapitola 6

Toky v sítích

6.1 Základní pojmy

***Definice* 6.1.1.** Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf. Mějme $X, Y \subset V$ množiny vrcholů takové, že $X, Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ a funkci $c : E \to \mathbb{N}$. Uspořádanou čtveřici $N = (G, X, Y, c)$ nazveme **síť**.

V případě toků v sítích slouží (orientované) grafy jako modely dopravní sítě, kterou prochází nějaký tok — elektřiny, zboží, nebo třeba dat. Z této situace vychází i názvosloví: vrcholy množiny X se označují jako výrobci, vrcholy množiny Y jako spotřebitelé a hodnota funkce c představuje kapacitu daného spojení.

V celé kapitole budeme používat následující značení: nechť e je hrana orientovaného grafu; symbolem e^+ označujeme vrchol, do kterého hrana e vede, zatímco symbolem e^- vrchol, ze kterého e vychází.

***Definice* 6.1.2. Tok v síti** $N = (G, X, Y, c)$ je funkce $f : E \to \mathbb{R}$, která splňuje následující dvě podmínky

(T1) $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro všechny hrany $e \in E$.

(T2) $\sum_{e^+=v} f(e) = \sum_{e^-=v} f(e)$ pro všechny tak zvané vnitřní vrcholy sítě $v \in V \setminus X \setminus Y$.

Poznámka. V každé síti existuje alespoň jeden tom, neboť funkce $\forall e \in E\,(f(e) = 0)$ splňuje obě podmínky v Definici 6.1.2. Tento tok se nazývá **nulový**.

***Definice* 6.1.3. Hodnota toku** f v síti $N = (G, X, Y, c)$, označujeme $\mathrm{val}(f)$, je definována jako

$$\mathrm{val}(f) := \sum_{e^- \in X} f(e) \;-\; \sum_{e^+ \in X} f(e)\,.$$

Zbytek kapitoly (především úvahy o maximálním toku v následující části) si zjednodušíme tím, že budeme uvažovat pouze speciální tvar sítě — síť s jedním výrobcem a s jedním spotřebitelem. Poznamenejme, že to není moc velké omezení, neboť každou síť můžeme lehce transformovat do požadovaného tvaru:

- přidáme nové vrcholy x_0 (výrobce) a y_0 (spotřebitel)
- spojíme všechny vrcholy v X s vrcholem x_0 hranami s kapacitou $+\infty$
- spojíme všechny vrcholy v Y s vrcholem y_0 hranami s kapacitou $+\infty$

6.2 Maximální tok

***Definice* 6.2.1.** Řekneme, že tok f v síti N je **maximální**, pokud pro všechny toky f' v N platí $\mathrm{val}(f) \geq \mathrm{val}(f')$.

***Definice* 6.2.2.** Nechť $N = (G, x_0, y_0, c)$ je síť a nech $S \subset V(G)$ je taková, že $x_0 \in S$ a $y_0 \notin S$. Označme $\bar{S} := V(G) \setminus S$. Potom dvojici $(S, \bar{S})$ nazveme **řezem v síti** N. **Kapacitu řezu** $(S, \bar{S})$ definujeme jako

$$c((S,\bar{S})) = \sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in \bar{S}}} c(e)\,.$$

Tvrzení 6.2.3. *Pro každý tok f a řez $(S, \bar{S})$ v síti $N = (G, x_0, y_0, c)$ platí*

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e^- \in S,\, e^+ \in \bar{S}} f(e) \;-\; \sum_{e^- \in \bar{S},\, e^+ \in S} f(e) \leq c((S,\bar{S}))\,.$$

Důkaz. Z definice hodnoty toku máme

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e^- = x_0} f(e) - \sum_{e^+ = x_0} f(e) = \sum_{v \in S} \left(\sum_{e^- = v} f(e) - \sum_{e^+ = v} f(e) \right),$$

kde druhá rovnost plyne z podmínky (T2) pro tok. Sumu na pravé straně můžeme rozdělit na dvě části podle toho, zda má daná hrana oba konce v S (část (a)), nebo právě jeden konec v S (část (b))

$$\begin{aligned}\mathrm{val}(f) &= \underbrace{\sum_{e^- \in S,\, e^+ \in S} f(e) - \sum_{e^- \in S,\, e^+ \in S} f(e)}_{\text{(a)}} + \underbrace{\sum_{e^- \in S,\, e^+ \in \bar{S}} f(e) - \sum_{e^- \in \bar{S},\, e^+ \in S} f(e)}_{\text{(b)}} = \\ &= \sum_{e^- \in S,\, e^+ \in \bar{S}} f(e) - \sum_{e^- \in \bar{S},\, e^+ \in S} f(e) \leq c((S,\bar{S}))\,.\end{aligned}$$

Poslední nerovnost plyne podmínky (T1) pro tok f. $\square$

Poznámka. Speciálně platí, že hodnota maximálního toku je menší nebo rovna kapacitě minimálního řezu. Zjevně najdeme-li tok f s řez $(S, \bar{S})$ tak, že $\mathrm{val}(f) = c((S, \bar{S}))$, pak f je maximální tok.

***Definice* 6.2.4.** Nechť f je tok v síti $N = (G, x_0, y_0, c)$ a nechť P je neorientovaná cesta v G (tzn. zajímá nás pouze přítomnost hrany, nikoli její orientace) s počátkem v x_0. Pro každou $e \in P$ definujeme

$$\iota(e) := \begin{cases} c(e) - f(e) & \text{je-li } e \text{ na } P \text{ orientována ve směru od } x_0, \\ f(e) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jestliže $\iota(P) := \min_{e \in P} \iota(e) > 0$, pak řekneme, že cesta P je f-**nenasycená**.

Hodnota $\iota(P)$ se někdy nazývá zbytková kapacita. Je to vlastně maximální množství, o které můžeme zvýšit tok f na cestě P, aniž bychom porušili podmínku (T1) z definice toku. Formálně je postup tohoto zvýšení a jeho důsledek shrnut v následující větě.

Věta 6.2.5 (O f-nenasycených cestách). *Tok f v síti $N = (G, x_0, y_0, c)$ je maximální právě tehdy, když v N neexistuje f-nenasycená cesta končící ve vrcholu y_0.*

Důkaz. $\underline{\Rightarrow}$: *(sporem)* Nechť f je maximální tok v N a nechť v N existuje f-nenasycená cesta P končící v y_0. Definujeme $\tilde{f}$:

- $\forall e \in E$, $e \notin P$ $(\tilde{f}(e) = f(e))$,
- $\forall e \in E$, $e \in P$ orientovaná na P ve směru z x_0: $\tilde{f}(e) = f(e) + \iota(P)$,
- $\forall e \in E$, $e \in P$ orientovaná na P proti směru z x_0: $\tilde{f}(e) = f(e) - \iota(P)$.

Potom zjevně $\tilde{f}$ splňuje podmínky (T1) a (T2) pro tok a navíc $\mathrm{val}(\tilde{f}) = \mathrm{val}(f) + \iota(P) > \mathrm{val}(f)$.

$\underline{\Leftarrow}$: Definujeme množinu $S := \{v \in V \mid \exists f\text{-nenasycená cesta z } x_0 \text{ do } v\}$. Potom $x_0 \in S$ a podle předpokladu $y_0 \notin S$. $(S, \bar{S})$ je tedy řez v síti N. Na každé hraně $e = (u, v)$, kde $u \in S$ a $v \in \bar{S}$ musí být $\iota(e) = 0$ neboli $f(e) = c(e)$, jinak by bylo $v \in S$. Ze stejného důvodu na každé hraně $e = (u, v)$ s $u \in \bar{S}$ a $v \in S$ musí být $\iota(e) = 0$, a tedy $f(e) = 0$. Proto platí

$$c((S, \bar{S})) = \sum_{e^- \in S,\, e^+ \in \bar{S}} c(e) = \sum_{e^- \in S,\, e^+ \in \bar{S}} f(e) - \sum_{e^- \in \bar{S},\, e^+ \in S} f(e) = \mathrm{val}(f)\,.$$

Našli jsme řez s $c((S, \bar{S})) = \mathrm{val}(f)$. Tok f je tedy maximální. □

Věta 6.2.6 (Max-flow Min-cut teorém). *V libovolné síti je hodnota maximálního toku rovná kapacitě minimálního řezu.*

Důkaz. Podle Tvrzení 6.2.3 je kapacita libovolného řezu horní mezí na hodnotu toku v síti. Důkaz Věty 6.2.5 ukazuje, že maximální tok v síti nabývá této hranice pro jistý řez $(S, \bar{S})$. □

Věta 6.2.7 (O celočíselném toku). *Nechť N je síť s celočíselnými kapacitami hran. Pak v N existuje maximální tok s celočíselnými hodnotami.*

Důkaz. Hledáme maximální tok jako v důkazu Věty 6.2.5. Vyjdeme od nulového toku a v každém kroku tok zvedneme o $\iota(P) \in \mathbb{N}$. Kapacita minimálního řezu je konečné číslo, takže po konečně mnoha krocích dostaneme maximální tok s celočíselnými hodnotami. □

Poznámka. Důkaz Věty 6.2.7 dává algoritmus na nalezení maximálního toku: začneme od nulového toku a zvyšujeme jej, dokud existuje nějaká nenasycená cesta (toto je podstata „labeling algorithm“ Forda a Fulkersona (1957)). Tento přístup ovšem naráží na dva problémy:

- pro sítě s obecně reálnými kapacitami se algoritmus nemusí vůbec zastavit
- i v případě celočíselných kapacit může být časová náročnost (pokud špatně volíme nenasycené cesty, viz následující příklad) úměrná $\sum_{e \in E} c(e)$.

Příklad. Pokud budeme v následující síti hledat maximální tok pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu a přitom budeme na střídavě používat čárkovanou a tečkovanou cestu, budeme potřebovat m kroků (namísto optimálních 2).