Kapitola 9

Algebraická teorie grafů

9.1 Lineární algebra a teorie matic

Používané značení. $\sigma(\boldsymbol{A})$ ... spektrum matice $\boldsymbol{A}$

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = \Lambda$ ... uspořádaná vl. čísla

$\varrho(\boldsymbol{A}) = \max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i \in \sigma(A)\}$ ... spektrální poloměr matice $\boldsymbol{A}$

***Definice* 9.1.1.** Čtvercová matice se nazývá *rozložitelná*, je-li tvaru (nebo lze-li ji simultánní permutací řádků a sloupců převést na tvar)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ jsou čtvercové matice řádu alespoň 1. Čtvercová matice se nazývá *nerozložitelná*, není-li rozložitelná.

Tvrzení 9.1.2. *Adjacenční matice $\boldsymbol{A}_G$ grafu $G = (V, E)$ je nerozložitelná právě tehdy, když je graf G souvislý.*

Věta 9.1.3 (Perron-Frobenius)**.** *(1) Nechť $\boldsymbol{A}$ je nezáporná čtvercová matice. Potom $\varrho(\boldsymbol{A})$ je vlastním číslem matice $\boldsymbol{A}$ a existuje nezáporný vlastní vektor matice $\boldsymbol{A}$, odpovídající tomuto vlastnímu číslu.*

(2) Nechť $\boldsymbol{A}$ je nezáporná nerozložitelná čtvercová matice. Pak spektrální poloměr $\varrho(\boldsymbol{A})$ je kladné vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ s násobností jedna a tomuto vlastnímu číslu odpovídá kladný vlastní vektor. Žádnému jinému vlastnímu číslu již neodpovídá nezáporný vlastní vektor.

Tvrzení 9.1.4. *Vlastní čísla symetrické matice jsou reálná.*

Věta 9.1.5 (Schur)**.** *Každou komplexní čtvercovou matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ lze vyjádřit ve tvaru $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}^H$, kde $\boldsymbol{U}$ je unitární a $\boldsymbol{T}$ horní trojúhelníková matice.*

Věta 9.1.6 (Hlavní věta o symetrických maticích)**.** *Každou (reálnou) symetrickou matici* $\boldsymbol{A}$ *lze vyjádřit ve tvaru* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^T$*, kde* $\boldsymbol{C}$ *je ortogonální a* $\boldsymbol{D}$ *je reálná diagonální matice. Přitom diagonální prvky matice* $\boldsymbol{D}$ *jsou vlastní čísla matice* $\boldsymbol{A}$ *(vhodnou volbou matice* $\boldsymbol{C}$ *můžeme dosáhnout libovolného uspořádání) a sloupce matice* $\boldsymbol{C}$ *jsou vlastní vektory matice* $\boldsymbol{A}$*.*

Tvrzení 9.1.7. *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je nezáporná, symetrická matice,* Λ *její maximální vlastní číslo. Pak platí*

$$\varrho(\boldsymbol{A}) = \Lambda = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,.$$

Důkaz. První rovnost je obsahem Perron-Frobeniovy věty. Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný takový, že $\|\boldsymbol{x}\| = 1$. Nechť $\boldsymbol{D}$ je matice vzniklá diagonalizací matice $\boldsymbol{A}$, tj. $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, taková, že Λ se vyskytuje v jejím pravém dolním rohu. Nechť $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{x}$. Protože je $\boldsymbol{C}$ ortogonální, tvoří její sloupce ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$ a proto $\|\boldsymbol{y}\| = 1$. Takže

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \le \varrho(\boldsymbol{A}) \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \varrho(\boldsymbol{A})\,.$$

Pro libovolný $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dostáváme $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \varrho(\boldsymbol{A})$ a tedy $\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \varrho(\boldsymbol{A})$. Pokud zvolíme $\boldsymbol{x}$ tak, aby $\boldsymbol{y}^T = (0, \ldots, 0, 1)$ nastane (díky volbě tvaru matice $\boldsymbol{D}$) požadovaná rovnost $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \Lambda$. □

9.1.1 Spektrum adjacenční matice

Tvrzení 9.1.8. *Nechť* $\boldsymbol{A}_G$ *je adjacenční matice jednoduchého grafu* $G = (V, E)$ *s* $\#V = n$*. Pak*

(i) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$*,*

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \#E$*.*

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{D}$ je matice vzniklá diagonalizací matice $\boldsymbol{A}_G$. Matice $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{A}_G$ mají – jakožto podobné matice – stejné spektrum a stopu a proto

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{D}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_G) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{A}_G)_{ii} = 0\,,$$

kde poslední rovnost plyne z faktu, že jednoduchý graf neobsahuje smyčky a tedy jeho adjacenční matice má nulovou diagonálu.
Dále platí

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_G^2) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}_G^2\boldsymbol{C}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}_G\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}_G\boldsymbol{C}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{D}^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

a zároveň

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_G^2) = \sum_{v \in V} \mathrm{d}_G(v) = 2\#E\,,$$

kde poslední dvě rovnosti plynou z vět 1.4.1 respektive 1.2.1. $\square$

Věta 9.1.9. *Nechť Λ je maximální vlastní číslo adjacenční matice $\boldsymbol{A}_G$ grafu $G = (V, E)$. Pak platí $\delta(G) \leq \Lambda \leq \Delta(G)$.*

Důkaz. Nechť $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Označme $\boldsymbol{j} \in \mathbb{R}^n$ jednotkový vektor $\boldsymbol{j}^T = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$. Pak z Tvrzení 9.1.7 dostáváme

$$\Lambda = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}_G \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{A}_G \boldsymbol{j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_G(v_i) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(G) = \frac{1}{n} n\delta(G) = \delta(G)\,.$$

Nechť $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ je nezáporný vlastní vektor matice $\boldsymbol{A}_G$ k vlastnímu číslu Λ. Upravíme jej tak, aby maximální složka (ozn. x_k) byla 1. Dostáváme

$$\Lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{A}_G \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_G(v_1) \\ \vdots \\ \mathrm{d}_G(v_n) \end{pmatrix}, \tag{9.1}$$

tedy uvažujeme-li pouze k-tý řádek

$$\Lambda = \Lambda x_k = \dots = \mathrm{d}_G(v_k) \leq \Delta(G)\,. \tag{9.2}$$

$\square$

Poznámka. Kdy nastane v Tvrzení 9.1.9 rovnost $\Lambda = \Delta(G)$? V obou nerovnostech v rovnicích (9.1) a (9.2) musí nastat rovnost. Předně tedy musí platit $\mathrm{d}_G(v_k) = \Delta(G)$, dále pak

$$(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

tedy $x_i = 1$ pro každé i takové, že $\{v_k, v_i\} \in E$. To ale znamená, že i tuto složku vlastního vektoru k Λ jsem mohl použít v (9.2), tzn. i zde chceme nerovnost nahradit rovností. Speciálně musí platit $\mathrm{d}_G(v_i) = \Delta(G)$ pro všechna i taková, že $\{v_k, v_i\} \in E$. Zároveň pro všechny tyto vrcholy musíme zopakovat úvahu o druhé nerovnosti a podmínka $\mathrm{d}_G(v) = \Delta(G)$ se tak přenese i na sousedy sousedů vrcholu v_k a tak dál.

Důsledek 9.1.10. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf. Pak pro maximální vlastní číslo jeho adjacenční matice platí $\Lambda = \Delta(G)$ právě tehdy, když G je regulární.*

Tvrzení 9.1.11. *Nechť $G = (V, E)$ je regulární souvislý graf, $\boldsymbol{A}_G$ jeho adjacenční matice a $\sigma(\boldsymbol{A}_G) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \Lambda\}$. Pak vlastní vektory k vlastním číslům $\lambda \neq \Lambda$ leží v nadrovině $\{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$.*

Důkaz. Nechť λ je libovolné vlastní číslo $\boldsymbol{A}_G$, $\lambda \neq \Lambda$. Dle předpokladu je G souvislý, jeho adjacenční matice je tedy nerozložitelná a podle Perron-Frobeniovy věty má její maximální vlastní číslo Λ násobnost 1. Navíc podle důsledku 9.1.10 platí $\Lambda = \Delta(G)$. Celkem tedy $\lambda \neq \Delta(G)$. Sečteme-li rovnici

$$\boldsymbol{A}_G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

po složkách, dostaneme

$$\Delta(G) \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \,.$$

Protože $\lambda \neq \Delta(G)$ nastane rovnost pouze v případě $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. $\square$

Věta 9.1.12. *Nechť $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq \Lambda = \Delta(G)$ je spektrum adjacenční matice $\boldsymbol{A}_G$ regulární souvislého grafu $G = (V, E)$ s $\#V = n$. Pak spektrum adjacenční matice grafu $\overline{G}$ je $\{-1 - \lambda_i \,|\, i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{n - 1 - \Delta(G)\}$.*

Důkaz. Vyjdeme z následujícího vztahu mezi maticemi $\boldsymbol{A}_G$ a $\boldsymbol{A}_{\overline{G}}$.

$$\boldsymbol{A}_G + \boldsymbol{A}_{\overline{G}} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

1) Je-li $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vlastní vektor k Λ, pak z poznámky za větou 9.1.9 o grafu z $\Lambda = \Delta(G)$ plyne, že $\boldsymbol{y} = (1, \ldots, 1)$. Z rovnice (9.3) dostáváme

$$\boldsymbol{A}_{\overline{G}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{J} - \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_G) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \Delta(G) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n - 1 - \Delta(G)) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Takže $(n - 1 - \Delta(G))$ je vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}_{\overline{G}}$.

2) Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je vlastní vektor k λ_i, $i \leq n - 1$. Pak z rovnice (9.3) dostáváme

$$\boldsymbol{A}_{\overline{G}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{J} - \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_G) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (-1 - \lambda_i) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kde předposlední rovnost plyne z Tvrzení 9.1.11. Takže $(-1-\lambda_i)$ je vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}_{\overline{G}}$ pro všechna $i \leq n - 1$. $\square$

***Definice* 9.1.13.** Má-li charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A}$ tvar $\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$, definujeme $\widetilde{\chi}_{\boldsymbol{A}}(\lambda) := \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)$.

Tvrzení 9.1.14. *Pro diagonalizovatelnou matici $\boldsymbol{A}$ platí, že $\widetilde{\chi}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.*

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{A}$ je diagonalizovatelná, tj. existuje invertovatelná matice $\boldsymbol{P}$ taková, že

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

Pak následující rovnosti jsou ekvivalentní

$$\begin{aligned} \widetilde{\chi}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}) \cdots (\boldsymbol{A} - \lambda_s \boldsymbol{I}) = 0 \\ \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P} \cdots \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} - \lambda_s \boldsymbol{I})\boldsymbol{P} = 0 \\ (\boldsymbol{D} - \lambda_1 \boldsymbol{I})(\boldsymbol{D} - \lambda_2 \boldsymbol{I}) \cdots (\boldsymbol{D} - \lambda_s \boldsymbol{I}) = 0\,, \end{aligned}$$

přičemž třetí rovnost zjevně plyne z tvaru diagonální matice $\boldsymbol{D}$. ☐

Věta 9.1.15. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf. Pak spektrum jeho adjacenční matice $\boldsymbol{A}_G$ má víc různých vlastních hodnot, než je poloměr G (tj. maximální vzdálenost mezi dvojicí vrcholů v G).*

Důkaz. Sporem. Nechť $\#\sigma(\boldsymbol{A}_G) = k \leq \max_{u,v \in V} \mathrm{d}(u, v)$. Pak existuje v G dvojice vrcholů $v_i, v_j \in V$ taková, že $\mathrm{d}(v_i, v_j) = k$. Nechť polynom $\widetilde{\chi}_{\boldsymbol{A}_G}(\boldsymbol{A}_G)$ stupně k má tvar

$$\widetilde{\chi}_{\boldsymbol{A}_G}(\boldsymbol{A}_G) = \boldsymbol{A}_G^k + a_{k-1}\boldsymbol{A}_G^{k-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A}_G + a_0 \boldsymbol{I}\,. \tag{9.4}$$

Podle Věty 1.4.1 udává $(\boldsymbol{A}_G^l)_{ij}$ počet sledů délky l mezi vrcholy v_i a v_j. Z předpokladu $\mathrm{d}(v_i, v_j) = k$ plyne

$$(\boldsymbol{A}_G^l)_{ij} = 0 \quad \forall l = k-1, \ldots, 1 \qquad \text{a zároveň} \qquad (\boldsymbol{A}_G^k)_{ij} \geq 1\,.$$

Po dosazení do (9.4) dostáváme $(\widetilde{\chi}_{\boldsymbol{A}_G}(\boldsymbol{A}_G))_{ij} \geq 1$, tedy spor s Tvrzením 9.1.14. ☐

Věta 9.1.16. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf, Λ maximální vlastní číslo jeho adjacenční matice $\boldsymbol{A}_G$. Pak G je bipartitní právě tehdy, když i $-\Lambda$ je vlastní číslo $\boldsymbol{A}_G$.*

Důkaz. $\underline{\Rightarrow:}$ Nechť G je bipartitní. Pak $\boldsymbol{A}_G$ má (po permutaci vrcholů) blokový tvar. Nechť $\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}_G)$; rovnici $\boldsymbol{A}_G \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ můžeme blokově zapsat

$$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}.$$

Porovnáním bloků dostaneme rovnosti $\boldsymbol{B}\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{z}$. Uvažujeme vektor $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{y}, -\boldsymbol{z})^T$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ -\boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B}\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda\boldsymbol{y} \\ \lambda\boldsymbol{z} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ -\boldsymbol{z} \end{pmatrix},$$

a tedy $-\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}_G)$.

$\Leftarrow$: Nechť $-\Lambda$ je vlastní číslo $\boldsymbol{A}_G$. Volíme vlastní vektor $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ k $-\Lambda$ tak, aby $\|\boldsymbol{w}\| = 1$. Uvažujeme

$$\Lambda = |-\Lambda| = |-\Lambda\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A}_G\boldsymbol{w}| = \Big|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}w_iw_j\Big| \overset{(i)}{\leq} \sum_{ij}^{n} a_{ij}|w_i||w_j| =$$

$$= (|w_1|, \ldots, |w_n|)\boldsymbol{A}_G(|w_1|, \ldots, |w_n|)^T \overset{(ii)}{\leq} \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}_G\boldsymbol{x} = \Lambda\,.$$

Protože se levá a pravá strana rovnají, musí být nerovnosti *(i)* a *(ii)* rovnostmi:

- $(|w_1|, \ldots, |w_n|)\boldsymbol{A}_G(|w_1|, \ldots, |w_n|)^T = \Lambda$.
  Tato rovnost implikuje, že $(|w_1|, \ldots, |w_n|)^T$ je vlastním vektorem k Λ. Protože G je souvislý, $\boldsymbol{A}_G$ je nerozložitelná a podle Perron-Frobeniovy věty pro všechna $i = 1, \ldots, n$ platí $|w_i| > 0$.

- $\big|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}w_iw_j\big| = \sum_{ij}^{n} a_{ij}|w_i||w_j|$
  Tato rovnost znamená, že všechny mají členy stejná znaménka a rovnost tedy platí i bez absolutních hodnot. Protože $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}w_iw_j \leq 0$ je nutně i každý člen sumy menší nebo roven nule.

Nechť $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Definujeme $V_1 := \{v_i \,|\, w_i < 0\}$ a $V_2 := \{v_i \,|\, w_i > 0\}$. Protože pro všechna i je $|w_i| > 0$, tvoří V_1 a V_2 disjunktní rozklad množiny V vrcholů grafu G. Navíc $V_1 \neq \emptyset$ a $V_2 \neq \emptyset$, protože jinak by $(w_1, \ldots, w_2)$ byl vlastní vektor k $-\Lambda$ i Λ.
Graf G je bipartitní s rozkladem $V_1 \cup V_2$: nechť $\{v_i, v_j\}$ je hrana v G. Pak $a_{ij} = 1$, a protože $a_{ij}w_iw_j \leq 0$ a zároveň $|w_i| > 0$ a $|w_j| > 0$ mají nutně w_i a w_j jiná znaménka a tedy jeden z vrcholů v_i, v_j patří do množiny V_1 a druhý do V_2. □

Věta 9.1.17. *Graf $G = (V, E)$ je bipartitní právě tehdy, když spektrum jeho adjacenční matice je symetrické kolem nuly (včetně násobností).*

Důkaz. $\Rightarrow$: Viz stejný směr v důkazu věty 9.1.16.

$\Leftarrow$: Napřed předpokládejme, že G je souvislý. Pak z předpokladu na symetričnost spektra plyne $-\Lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}_G)$ a G je bipartitní podle věty 9.1.16.

Nechť G má komponenty $G_1, G_2, \ldots, G_r$. Pak existuje permutace vrcholů taková, že adjacenční matice grafu G má tvar

$$\boldsymbol{A}_G = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{G_1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{G_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{G_r} \end{pmatrix}.$$

Nechť Λ je maximální vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}_G$. Pak se symetrie je $-\Lambda$ také vlastním číslem $\boldsymbol{A}_G$. BÚNO $-\Lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}_{G_1})$. Protože každý blok je nezáporná, symetrická, nerozložitelná matice, je dle Perron-Frobenia i $\Lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}_{G_1})$. Protože je G_1 komponenta a tedy souvislý graf, je podle věty 9.1.16 graf G_1 bipartitní. Spektrum $\sigma(\boldsymbol{A}_{G_1})$ je tedy symetrické.
Nadále uvažujeme graf $G \setminus G_1$; ze spektra $\sigma(\boldsymbol{A}_G)$ jsme odstranili symetrickou část $\sigma(\boldsymbol{A}_{G_1})$, takže zbytek je stále symetrický. Opakováním tohoto postupu ukážeme, že každá komponenta je bipartitní graf. $\square$