3.1 Vrcholová a hranová souvislost

***Definice* 3.1.1.** Nechť $k \in \mathbb{N}$. Graf $G = (V, E)$ se nazývá *k-souvislý* (přesněji k-vrcholově souvislý), pokud $|V| > k$ a graf $G \setminus U$ je souvislý pro každou $U \subseteq V$ takovou, že $\#U < k$. Maximální $k \in \mathbb{N}$ takové, že graf G je k-souvislý, nazýváme *(vrcholovou) souvislostí* G, značíme $\varkappa(G)$.

Poznámka.
- každý neprázdný graf je 0-souvislý
- 1-souvislé jsou grafy (s $\#V \geq 2$), které jsou souvislé (viz Definice ??)
- $\varkappa(G) = 0$ právě tehdy, když $G = K_1$ nebo G není souvislý
- $\varkappa(K_n) = n - 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

***Definice* 3.1.2.** Nechť $l \in \mathbb{N}$. Graf $G = (V, E)$ se nazývá *l-hranově souvislý*, pokud $\#V \geq 2$ a graf $G \setminus F$ je souvislý pro každou $F \subseteq E$ takovou, že $\#F < l$. Maximální $l \in \mathbb{N}$ takové, že graf G je l-hranově souvislý, nazýváme *hranovou souvislostí* G, značíme $\varkappa'(G)$.

***Definice* 3.1.3.** Nechť $G = (V, E)$ je graf a $A, B \subseteq V$. Cestu $P = x_0 \cdots x_k$ v grafu G nazveme *A–B cestou* pokud $V(P) \cap A = \{x_0\}$ a $V(P) \cap B = \{x_k\}$. Nechť $X \subseteq V \cup E$ je taková, že každá A–B cesta obsahuje vrchol nebo hranu z X. Pak řekneme, že X v G *odděluje A od B*.

Poznámka.
- Z definice 3.1.3 plyne, že $A \cap B \subseteq X$
- Graf G je k-vrcholově souvislý, pokud žádné dva jeho vrcholy nejsou odděleny méně než k vrcholy.
- Speciální případ je $X = A$. Takovéto X odděluje A od B, neboť každá cesta, která začíná v nějakém vrcholu A obsahuje alespoň tento vrchol z A (a tedy z X).

***Definice* 3.1.4.** *Množinu sousedů vrcholu $v \in V$* v grafu značíme $N(v)$,

$$N(v) = \{u \in V | \{v, u\} \in E\}.$$

Věta 3.1.5 (Whitney, 1932)**.** *Pro každý graf G s $|V(G)| \geq 2$ platí $\varkappa(G) \leq \varkappa'(G) \leq \delta(G)$.*

Důkaz. Nerovnost $\varkappa'(G) \leq \delta(G)$ plyne z faktu, že množina hran, které vychází z pevně zvoleného vrcholu v odděluje v G vrchol v od $N(v)$.

Nechť $F \subseteq E$ je minimální množina hran taková, že $G \setminus F$ je nesouvislý. Ukážeme, že $\varkappa(G) \leq |F|$. Předpokládejme, že v G existuje vrchol v, který není incidentní s žádnou hranou v F. Nechť C_v je komponenta grafu $G \setminus F$, která obsahuje v. Potom vrcholy v C_v, které jsou koncovými vrcholy hran z F (v grafu G) oddělují v od $G \setminus C_v$. Protože žádná hrana z F nemá oba konce v C_v (díky minimalitě F) je těchto oddělujících vrcholů maximálně $|F|$ a tedy $\varkappa(G) \leq |F|$.

Nyní naopak předpokládejme, že každý vrchol v G je koncem nějaké hrany z F. Zvolme pevně libovolný vrchol v a označme C_v komponentu grafu $G \setminus F$, která obsahuje v. Potom každý soused w vrcholu v takový, že $\{v, w\} \notin F$, leží v C_v a navíc jsou tito sousedé konce různých hran z F (opět z minimality F). To znamená, že $\mathrm{d}_G(v) \leq |F|$. Protože $N(v)$ odděluje v od zbylých vrcholů v grafu, dostáváme $\varkappa(G) \leq |F|$; s výjimkou případů, kdy tyto zbylé vrcholy neexistují. V takovém případě $v \cup N(v) = V(G)$. Protože v byl volen libovolně musí tato rovnost platit pro všechny vrcholy v $V(G)$, G je tedy úplný graf. Pro úplný graf ovšem platí $\varkappa(K_n) = \varkappa'(K_n) = n - 1$. $\square$