Počet koster grafu

Věta 1.7.4. *Nechť $G = (V, E)$ je jednoduchý orientovaný graf a nechť $\boldsymbol{B}$ je jeho incidenční matice. Označme $\boldsymbol{B}_0$ matici, která z $\boldsymbol{B}$ vznikne odstraněním nějakého (libovolného) řádku. Pak počet různých koster grafu G je roven* $\det \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{B}_0^T$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsme vynechali poslední (n-tý) řádek matice $\boldsymbol{B}$. Označme C čtvercovou podmatici $\boldsymbol{B}_0$ řádu $n-1$. Pak platí

$$|\det C| = \begin{cases} 1 & \text{podgraf } G' \subseteq G \text{ indukovaný vrcholy,} \\ & \text{které odpovídají sloupcům matice } C\text{, je kostra } G \\ 0 & \text{jinak}\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Platnost vztahu (1.2) dokážeme indukcí na n. Případ $n = 1$ je triviální. Pro $n > 1$ nastávají dvě možnosti.

a) Existuje vrchol v_i ($i \neq n$) stupně 1 v G'. Potom i-tý řádek matice C obsahuje právě jeden nenulový prvek (1 nebo -1). Rozvineme determinant podle tohoto řádku a použijeme indukční předpoklad. Zjevně G' je kostra G právě tehdy, když $G' \setminus \{v_i\}$ je kostra $G \setminus \{v_i\}$.

b) Graf G' nemá žádný vrchol stupně 1 (resp. G' má nejvýše jeden vrchol stupně 1 a to vrchol v_n odpovídající umazanému řádku). Potom ovšem G' není strom (neboť v takovém případě by měl alespoň dva vrcholy stupně 1) a tedy ani kostra G. Navíc má-li G' $n-1$ hran a není stromem, pak v něm musí existovat vrchol s nulovým stupněm.

   i) Vrchol s nulovým stupněm není v_n. Pak matice $\boldsymbol{C}$ má nulový řádek a $\det \boldsymbol{C} = 0$.

   ii) Vrchol s nulovým stupněm je v_n. Pak každý sloupec matice $\boldsymbol{C}$ obsahuje jednu 1 a jednu -1. Suma řádek je tedy nula, řádky jsou lineárně závislé a $\det \boldsymbol{C} = 0$.

Tvrzení věty plyne z Binet-Cauchyova vzorce

$$\det \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{B}_0^T = \sum (\det C)^2\,,$$

kde sčítáme, přes všechny čtvercové podmatice $\boldsymbol{B}_0$ řádu $n-1$ a ze vzorce (1.2). □

Věta 1.7.5 (Kirchhoff's Matrix-Tree Theorem)**.** *Nechť $G = (V, E)$ je jednoduchý, neorientovaný graf s $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Definujeme matici $\boldsymbol{L}_0$ rozměru $(n-1) \times (n-1)$ následujícím způsobem*

$$(\boldsymbol{L}_0)_{i,j} = \begin{cases} d_G(v_i) & i = j\,, \\ -1 & i \neq j \text{ a } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak G má právě $\det \boldsymbol{L}_0$ *koster.*

Důkaz. Na základě grafu G sestrojíme orientovaný graf H: použijeme stejnou množinu vrcholů a každou hranu grafu G nahradíme dvojicí hran opačné orientace: $\{u,v\} \in E(G) \Leftrightarrow ((u,v) \in E(H) \wedge (v,u) \in E(H))$. Nechť A_0 vznikla z je incidenční matice grafu H umazáním posledního řádku. Tvrdíme, že

$$A_0 A_0^T = 2L_0 .$$

Prvek matice $A_0 A_0^T$ na pozici (i,j) je skalárním součinem i-tého a j-tého řádku matice A_0.

- Je-li $i = j$, pak každá hrana která ve v_i začíná, nebo končí přispěje jedničkou. Takže $(A_0 A_0^T)_{i,i} = \mathrm{d}_H(v_i) = 2\mathrm{d}_G(v_i)$.
- Je-li $i \neq j$, pak každá hrana, která začíná ve v_i a končí ve v_j, nebo naopak začíná ve v_j a končí ve v_i přispěje -1. Protože je G jednoduchý, je mezi každou dvojicí vrcholů maximálně jedna hrana (které odpovídá dvojice hran v H). Takže $(A_0 A_0^T)_{i,j} = -2$ je-li $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ a $(A_0 A_0^T)_{i,j} = 0$ jinak.

Celkem máme požadovanou rovnost $A_0 A_0^T = 2L_0$ a tedy

$$\det A_0 A_0^T = 2^{n-1} \det L_0 .$$

Protože z každé kostry grafu G může vzniknout 2^{n-1} různých koster grafu H – přiřazením orientace $n-1$ hranám – plyne tvrzení z Věty 1.7.4. $\square$