3.2 Mengerova věta

***Definice* 3.2.1.** Nechť $G=(V,E)$ je graf a $A,B\subseteq V$. Definujeme $k(G,A,B)$ jako minimální počet vrcholů, které v G oddělují A od B.

Důsledek 3.2.2. *(1) Protože jak A tak B oddělují A od B máme* $k(G,A,B)\le \min(\#A,\#B)$.

(2) Pokud v grafu G neexistují žádné $A-B$ cesty, pak libovolná množina vrcholů a hran X odděluje A od B. V takovém případě $k(G,A,B)=0$.

(3) Pokud $A\subseteq B$, pak triviální cesty (tj. nulové délky), které začínají a končí v A neobsahují žádné vrcholy, které nejsou v A. Proto žádná množina, která neobsahuje A nemůže oddělovat A od B; to znamená

$$A\subseteq B \quad\Rightarrow\quad k(G,A,B)=\#A\,. \tag{3.1}$$

(4) Nechť A je pevné a B_1,B_2 jsou takové, že $B_1\subseteq B_2$. Pak každá množina, která odděluje A od B_2 nutně odděluje i A od B_1; to znamená

$$B_1\subseteq B_2 \quad\Rightarrow\quad k(G,A,B_1)\le k(G,A,B_2)\,. \tag{3.2}$$

Věta 3.2.3 (Menger, 1927)**.** *Nechť $G=(V,E)$ je graf, $A,B\subseteq V$. Pak minimální počet vrcholů oddělujících v G množinu A od B je roven maximálnímu počtu disjunktních $A-B$ cest v G.*

Nechť $k=k(G,A,B)$. Zjevně G nemůže obsahovat víc, než k disjunktních $A-B$ cest. Ukážeme, že takových k cest existuje. Podle Důsledku 3.2.2, bod (2) můžeme předpokládat, že existuje alespoň jedna $A-B$ cesta (jinak je tvrzení triviání). Za tohoto předpokladu hledaných k cest najít opakovaným použitím následujícího Lemma.

Lemma 3.2.4. *Nechť $G=(V,E)$ je graf, $A,B\subseteq V$, $k=k(G,A,B)$ a $n\in\mathbb{N}$, $n<k$. Existuje-li v G n disjunktních $A-B$ cest*

$$P_1,P_2,\dots,P_n\,,$$

pak v G existuje i $n+1$ disjunktních $A-B$ cest

$$Q_1,Q_2,\dots,Q_{n+1}$$

takových, že je-li $b\in B$ koncem nějaké cesty P_i, pak je b také koncem nějaké cesty Q_j.

Důkaz. Indukcí na $\beta:=\#(V\setminus B)$, tj. počet vrcholů grafu G, které nejsou v množině B.

Nechť $\beta=0$, takže všechny vrcholy grafu G patří do množiny B. Nutně $A\subseteq B$ a podle vztahu (3.1) máme $k=\#A$. V takovém případě je $A-B$ cesta libovolná cesta nulové délky, která začíná (a končí) v nějakém vrcholu A. Máme-li n $(n<\#A)$ $A-B$ cest, můžeme přidat další $A-B$ cestu nulové délky začínající v některém zatím nepoužitém vrcholu množiny A. Tím získáme $n+1$ cest požadovaných vlastností.

Předpokládejme, že lemma platí pro všechna $\beta < \beta_0$ pro nějaké pevné $\beta_0 \geq 1$. Ukážeme platnost pro $\beta = \beta_0$. Mějme tedy $G = (V, E)$ a množiny $A, B \subseteq V$ takové, že $k = k(G, A, B)$ a $\beta_0 = \$(V \setminus B)$. Nechť $P_1, \ldots, P_n$ je n disjunktních $A-B$ cest. Označme konce cest P_j takto: a_j konec v množině A, b_j konec v množině B. Protože podle předpokladů $n < k$, neodděluje množina $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ A od B, tj. v G existuje $A-B$ cesta, která není incidentní z žádným z vrcholů z $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, označme ji R.

Pokud je cesta R disjunktní se všemi cestami $P_1, \ldots, P_n$ pak

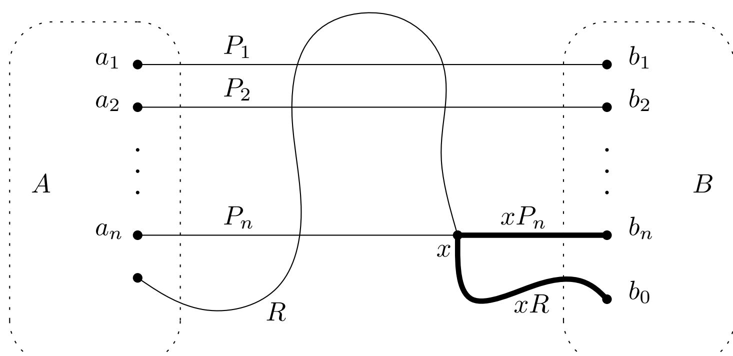
$$Q_1 = P_1, \ldots, Q_n = P_n, Q_{n+1} = R$$

je $n+1$ cest hledaných vlastností.

V opačném případě označme x poslední vrchol, ve kterém R protíná nějakou cestu P_i. Bez újmy na obecnosti $i = n$. Definujeme

$$B' := B \cup V(xP_n \cup xR),$$

tzn. B' původní množina B spolu s vrcholy na cestách, které jsou na následujícím obrázku vyznačeny tučně.



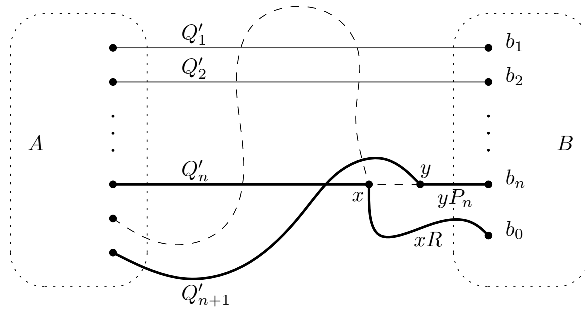
Obrázek 3.4: Výchozí situace pro důkaz Lemma 3.2.4.

Z definice plyne $B \subseteq B'$, takže podle vztahu (3.2) dostáváme $n < k = k(G, A, B) \leq k(G, A, B')$. Podle indukčního předpokladu pro množinu B' ($\#B' > \#B$) a n disjunktních $A-B'$ cest $P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n x$ existuje v grafu $n+1$ disjunktních $A-B'$ cest $Q'_1, \ldots, Q'_{n+1}$, jejichž koncové body jsou $b_1, \ldots, b_{n-1}, x, y$. Pro vrchol y platí, že $y \in B'$ a $y \notin \{b_1, \ldots, b_{n-1}, x\}$. Bez újmy na obecnosti můžeme zpermutovat indexy cest tak, aby v množině B' byly: b_i koncem Q'_i pro $i = 1, \ldots, n-1$, x koncem Q'_n a y koncem Q'_{n+1}. Rozlišíme tři případy v závislosti na y.

a) $y \in xP_n$.

Definujeme

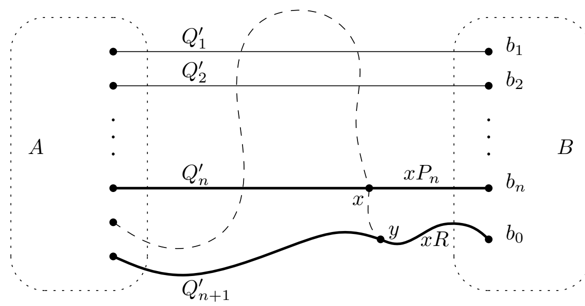
$$
\begin{aligned}
Q_i &:= Q'_i && 1 \le i \le n-1 \\
Q_n &:= Q'_n x R \\
Q_{n+1} &:= Q'_{n+1} y P_n
\end{aligned}
$$



b) $y \in xR$.

Definujeme

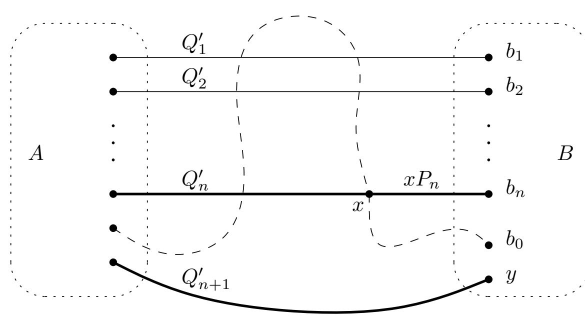
$$
\begin{aligned}
Q_i &:= Q'_i && 1 \le i \le n-1 \\
Q_n &:= Q'_n x P_n \\
Q_{n+1} &:= Q'_{n+1} y R
\end{aligned}
$$



c) $y \notin xP_n \cup xR$.

Protože y je konec A–B' cesty, nutně $y \in B$. Navíc $y \neq b_n$ a z indukčního předpokladu také $y \neq b_j$ pro $1 \le j \le n-1$. Definujeme

$$
\begin{aligned}
Q_i &:= Q'_i && 1 \le i \le n-1, \\
Q_n &:= Q'_n x P_n \\
Q_{n+1} &:= Q'_{n+1}.
\end{aligned}
$$



Ve všech třech případech $Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ je $n+1$ A–B cest požadovaných vlastností. □

***Definice* 3.2.5.** Cesty v grafu nazveme *nezávislé*, pokud žádná z nich neobsahuje vnitřní (tj. nekoncový) vrchol nějaké jiné.

Důsledek 3.2.6. *Nechť $G = (V, E)$ je graf a nechť $a, b \in V$, $a \neq b$. Pokud $\{a, b\} \notin E$ pak minimální počet vrcholů (různých od a, b), které oddělují v G a od b je rovný maximálnímu počtu nezávislých a–b cest v G.*

Důkaz. Aplikací Mengerovy věty pro $A := N(a)$ a $B := N(b)$. □

Věta 3.2.7 (Globální verze Mengerovy věty)**.** *Graf $G = (V, E)$ je k-vrcholově souvislý právě tehdy, když obsahuje k nezávislých cest mezi libovolnou dvojicí vrcholů.*

Důkaz. $\underline{\Leftarrow}$: Protože G obsahuje k nezávislých cest mezi libovolnou dvojicí vrcholů, pak nutně $\#V > k$ (protože G je jednodychý) a navíc žádné dva jeho vrcholy nemohou být odděleny méně než k vrcholy. Podle definice je G k-souvislý.

$\underline{\Rightarrow}$: Sporem; předpokládáme, že G je k-souvislý a zároveň v něm existuje dvojice vrcholů $a, b \in V$ takých, že mezi nimi je méně než k nezávislých cest. Podle Důsledku 3.2.6 to znamená, že $\{a, b\} \in E$. Uvažujeme graf $G' := G \setminus \{\{a, b\}\}$. Graf G' obsahuje maximálně $k - 2$ nezávislých a–b cest. Opět podle Důsledku 3.2.6 existuje $X \subseteq V$ taková, že X odděluje v G a od b a zároveň $\#X \leq k-2$. Z k-souvislosti grafu G plyne $\#V > k$ a tedy existuje alespoň jeden vrchol $v \in V$, $v \notin X \cup \{a, b\}$. V grafu G' nutně množina X odděluje vrchol v buď od vrcholu a nebo od b (jinak by X neoddělovala a od b). Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že X odděluje v G' v od a. Potom ovšem je $X \cup \{b\}$ množina maximálně $k - 1$ vrcholů, které v G oddělují v od a. Spor s k-souvislostí G. $\square$