4.1 Maximální párování

***Definice* 4.1.1.** Buď $G = (V, E)$ graf. *Párování* v grafu G je množina $M \subseteq E$ taková, že $\forall e, f \in M (e \neq f \Rightarrow e \cap f = \emptyset)$.

***Definice* 4.1.2.** Nechť $G = (V, E)$ je graf a $M \subseteq E$ je párování v G. Řekneme, že vrchol $v \in V$ je *M-saturovaný* pokud $\exists e \in M (v \in e)$.

***Definice* 4.1.3.** Párování M v grafu G nazveme *maximální*, pokud pro každé párování M' v G platí $\#M \geq \#M'$. Velikost maximálního párování v grafu G značíme $\nu(G)$.

***Definice* 4.1.4.** Nechť M je párování v grafu $G = (V, E)$. Cestu $v_0, v_1, \ldots, v_k$ v G nazveme *M-střídající*, jestliže $\{v_{i-1}, v_i\} \in E \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin E$ pro všechna $i = 1, \ldots, k-1$. M-střídající cestu nazveme *M-zlepšující*, když ani jeden z jejích koncových vrcholů není M-saturovaný.

Věta 4.1.5 (Berge)**.** *Párování M v grafu $G = (V, E)$ je maximální právě tehdy, když v G neexistuje M-zlepšující cesta.*

Důkaz. $\underline{\Rightarrow}$: Nechť v G existuje M-zlepšující cesta P. Pak $M' := M \triangle P$ je párování v G takové, že $\#M' = \#M + 1$. To je spor s maximalitou M.

$\underline{\Leftarrow}$: Nechť v G neexistuje M-zlepšující cesta a zároveň M není maximální párování. Pak v G existuje párování M' takové, že $\#M' > \#M$. Uvažujeme graf $H := (V, M \triangle M')$. H je tvořen izolovanými body, cestami a kružnicemi sudé délky. Protože $\#M' > \#M$, musí H obsahovat alespoň jednu cestu liché délky, ozn. P, jejíž první i poslední hrana jsou z M'. Ani jeden koncový vrchol cesty P nemohl být v G M-saturovaný, takže P je M-zlepšující cesta v G. $\square$

4.2 Velikost maximálního párování

***Definice* 4.2.1.** Množina $S \subseteq V(G)$ se nazývá *vrcholové pokrytí* grafu G, pokud $\forall e \in E(G)$ $\exists v \in S$ $(v \in e)$. Vrcholové pokrytí S grafu G nazveme *minimální*, pokud pro každé vrcholové pokrytí S' grafu G platí $\#S \leq \#S'$. Velikost minimálního vrcholového pokrytí grafu G značíme $\tau(G)$.

Pozorování 4.2.2. *Pro libovolné párování M v grafu G a libovolné vrcholové pokrytí S grafu G platí $|M| \leq |S|$. Speciálně $\nu(G) \leq \tau(G)$.*

Věta 4.2.3 (Königova-Egerváryova věta)**.** *Nechť G je bipartitní graf. Pak $\nu(G) = \tau(G)$.*

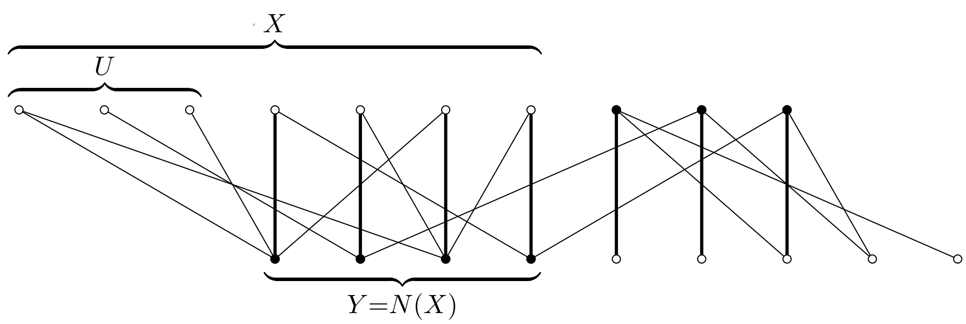
Důkaz. Nechť $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitní graf a nechť M je maximální párování v G. Označme $U \subseteq V_1$ množinu vrcholů, které nejsou M-saturované. Definujeme

$$X := \{v \in V_1 \mid \text{z } U \text{ vede do } v \ M\text{-střídající cesta}\},$$
$$Y := \{v \in V_2 \mid \text{z } U \text{ vede do } v \ M\text{-střídající cesta}\}.$$

Pak na M-střídajících cestách začínajících v U vždy 1. hrana není z M, 2. hrana je z M, 3. hrana není z M, atd. Každá M-střídající cesta začínající v U nutně končí ve V_1. V opačném případě by byla zároveň M-zlepšující což je ve sporu s maximalitou párování M. Každý vrchol z Y je tedy spojen hranou z M s vrcholem z $X \setminus U$. Navíc každý soused libovolného vrcholu x z X musí ležet v Y: nechť y je soused $x \in X$. Pak M-střídající cesta z U do x prodloužená o hranu $\{x, y\}$ tvoří M-střídající cestu z U do y. Tedy

$$N(X) = Y. \tag{4.1}$$

Definujeme $K := (V_1 \setminus X) \cup Y$. Pak K je vrcholové pokrytí G. V opačném případě v G existuje hrana s jedním koncem v X a s druhým koncem v $V_2 \setminus Y$. To je spor s (4.1).



Obrázek 4.1: Množiny U, X a Y v důkazu Věty 4.2.3. Hrany z párování M jsou tučné, vrcholy z množiny K plné.

Navíc platí $\#M = \#K$. Jinak by musela existovat hrana $e \in M$, $e = \{x, y\}$ taková, že $x, y \in K$ a tedy $x \in V_1 \setminus X$ a $y \in Y$. V grafu nutně existuje M-střídající cesta z U do y, ozn. P, jejíž poslední hrana není z M. Potom $P + e$ je M-střídající hrana z U do x a tedy $x \in X$. Spor s $x \in V_1 \setminus X$. □

Věta 4.2.4 (Königova-Oreova formule). *Nechť $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitní graf. Pak*

$$\nu(G) = \min_{S \subseteq V_1} \{\#(V_1 \setminus S) + \#N(S)\}.$$

Důkaz. Nechť $S \subseteq V_1$ je libovolná. Pak každá hrana grafu (a tedy i hrana z nějakého párování M) má konec buď ve $V_1 \setminus S$, nebo v $N(S)$. Maximální počet hran v libovolném párování je tedy menší nebo roven $\#(V_1 \setminus S) + \#N(S)$ pro každou $S \subseteq V_1$. Proto

$$\nu(G) \leq \min_{S \subseteq V_1} \{\#(V_1 \setminus S) + \#N(S)\}\,.$$

Naopak nechť M je maximální párování. Označme $S \subseteq V_1$ množinu vrcholů, do kterých vede M-střídající cesta z nějakého $v \in V_1$, který není M-saturovaný. Snadno ověříme, že

- každý vrchol v $N(S)$ je M-saturovaný,
- každý vrchol v $V_1 \setminus S$ je M-saturovaný,
- žádná hrana z M nespojuje vrchol z $V_1 \setminus S$ s vrcholem z $N(S)$.

Z toho plyne, že

$$\nu(G) \geq \min_{S \subseteq V_1} \{\#(V_1 \setminus S) + \#N(S)\}\,. \qquad \square$$