6.3 Booleovské toky

***Definice* 6.3.1. Booleovský tok** v síti $N = (E, X, Y, c)$ je takový tok f, pro který $f(e) \in \{0, 1\}$ pro všechny $e \in E(G)$.

Poznámka. Booleovské toky se objevují především v kombinatorických aplikacích teorie toků. S jejich pomocí je snadné demonstrovat, jak významným výsledkem je Max-flow Min-cut teorém (Věta 6.2.6). Mnoho výsledků z teorie grafů je — při vhodně zvolené síti, často s booleovským tokem — jejím přímým důsledkem.

S pomocí booleovských sítí předvedeme alternativní důkaz Hallovy věty o párování v bipartitních grafech (Věta 4.2.1) a Mengerovy věty o souvislosti grafů (Věta 3.2.3).

Hallova věta

Věta. *Nechť $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitiní graf. V G existuje párování saturující celé V_1 právě tehdy, když $\forall T \subset V_1 (|N(T)| \geq |T|)$.*

Napřed zkonstruujeme na základě bipartitního grafu G síť $N(H, x_0, y_0, c)$:

- $V(H) = V(G) \cup \{x_0, y_0\}$, kde $x_0, y_0 \notin V(G)$.
- $E(H) = \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E(G), u \in V_1, v \in V_2\} \cup \{(x_0, u) \mid u \in V_1\} \cup \{(v, y_0) \mid v \in V_2\}$.
- $c(e) = 1$ pro všechny $e \in E(H)$.

Lemma 6.3.2. *V síti N existuje tok f s* $\mathrm{val}(f) = |V_1|$ *právě tehdy, když v G existuje párování saturující celé V_1.*

Důkaz. $\underline{\Leftarrow}$: Nechť M je párování v G (a zároveň v příslušné části H) saturující celé V_1. Položme $f(e) = 1$ pro všechny $e \in M$ a navíc $f((x_0, u)) = 1$ a $f((v, y_0)) = 1$ pokud u respektive v jsou M-saturované. Pro všechny ostatní hrany $f(e) = 0$. Zřejmě f je tok v N s $\mathrm{val}(f) = |V_1|$.

$\underline{\Rightarrow}$: Tok f s $\mathrm{val}(f) = |V_1|$ je zjevně maximální na N. Podle věty o Celočíselném toku (Věta 6.2.7) můžeme předpokládat, že f je booleovský. Takže párování saturující celé V_1 získáme tak, že do něj dáme všechny hrany $e = (u, v)$ takové, pro které $u \in V_1$, $v \in V_2$ a $f(e) = 1$. Podmínky na párování jednoduše plynou z toho, že tok je booleovský a z podmínek (T1) a (T2) na tok. □

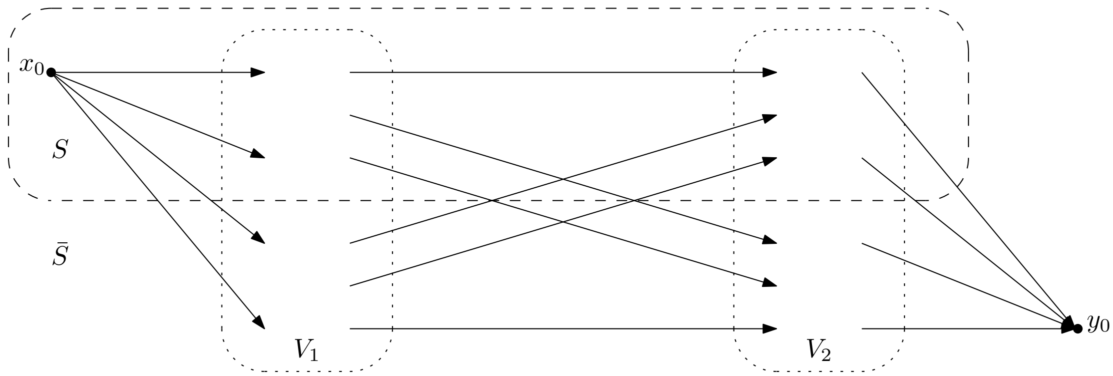
Důkaz Hallovy věty. Jak jsme předvedli již v kapitole 4, implikace zleva doprava je triviální. Dokážeme tedy pouze směr zprava doleva. Předpokládejme, že maximální tok v N má hodnotu menší než $|V_1|$ (tj. podle Lemma 6.3.2 v G není párování saturující celé V_1). Podle Max-flow Min-cut teorému existuje v N řez $(S, \bar{S})$ s $c((S, \bar(S))) < |V_1|$.

Díky konstrukci sítě N (viz Obrázek 6.1) máme

$$c((S, \bar{S})) \geq |\bar{S} \cap V_1| + |\bar{S} \cap N(S \cap V_1)| + |S \cap V_2|\,,$$

a navíc

$$|N(S \cap V_1| \leq |\bar{S} \cap N(S \cap V_1)| + |S \cap V_2|\,.$$



Obrázek 6.1: Důkaz Hallovy věty pomocí booleovské sítě

Dohromady

$$|N(S \cap V_1)| \leq \underbrace{|\bar{S} \cap N(S \cap V_1)| + |S \cap V_2| + |\bar{S} \cap V_1|}_{\leq c((S,\bar{S}))} - |\bar{S} \cap V_1| < |V_1| - |\bar{S} \cap V_1| = |S \cap V_1| \,.$$

Podmínka z věty není splněna pro $T := S \cap V_1$. □

Mengerova věta

Věta. *Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $u, v \in V$, $u \neq v$. Pak minimální počet hran oddělujících u od v je roven maximálnímu počtu hranově disjunktních cest jdoucích z u do v.*

Důkaz. Nechť $N = (G, u, v, c)$ je síť s $c(e) = 1$ pro všechny $e \in E(G)$. Zřejmě každá množina hranově disjunktních cest vedoucích z u do v dává tok hodnoty k z u do v.

Naopak, nechť f je maximální tok v N. Můžeme předpokládat, podle Věty 6.2.7, že je booleovský. Na základě libovolného booleovského toku f v síti N s $\mathrm{val}(f) = k$ můžeme zkonstruovat k hranově disjunktních cest z u do v: z vrcholu u jdeme po neoznačených hranách s $f(e) = 1$ dokud nedorazíme do vrcholu v. Pokaždé, když projdeme po hraně, tak ji označíme. Když dojdeme do v, snížíme tok na označených hranách o 1 a sestrojíme z nich cestu odstraněním případných kružnic. Díky vlastnosti toku (T2) cesta musí končit ve vrcholu v. Hodnota toku se s každou takto sestrojenou cestou sníží o jedna. Maximální počet hranově disjunktních cest je tedy roven hodnotě maximálního toku a tedy i kapacitě minimálního řezu.

Zjevně každý řez $(S, \bar{S})$ v síti N dává množinu $c((S, \bar{S}))$ hran $X = \{e \in E(G) \,|\, e^- \in S,\, e^+ \in \bar{S}\}$, které oddělují u od v.

Naopak předpokládejme, že množina $X \subset E(G)$ odděluje u od v, a že velikost X je nejmenší možná. Nechť S je množina vrcholů ležících na cestách z u, které neobsahují žádnou hranu z X. Z definice množiny oddělující dva vrcholy máme $t \notin S$, $(S, \bar{S})$ je tedy řez v N. Navíc pro všechny hrany $e \in E(G)$ s $e^- \in S$, $e^+ \in \bar{S}$ platí $e \in X$, protože jinak by muselo být $e^+ \in S$, což je spor. Z minimality X plyne $|X| = c((S, \bar{S}))$. Minimální kapacita řezu v N je tedy rovna i minimálnímu počtu hran oddělujících u od v. □